第 11 卷第 6 期
1994 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 6
Dec., 1994

能控能观测度与多变量控制系统中变量的选择*

李 慷 席裕庚
(上海交通大学自动化所,200030)

摘要：本文讨论了工业过程控制系统中操作变量及量测变量的选取问题.首先通过引入一种变量选择矩阵,给出了问题的统一数学表达式,提出了系统能控性、能观性的两种测度,在此基础上给出了变量选择的有效算法.

关键词：能控测度；能观测度；多变量控制系统；变量选择

1 引 言

在现代工业过程中,人们面临的控制对象日趋复杂,这种复杂性首先表现在系统的结构上.面临众多的变量,如何从中选择合适变量作为操作变量及量测变量,以达到控制的目的,是控制系统设计中应首先考虑的[1].一组合理变量的选择应当满足:1) 保证系统的状态完全能控及能观. 2) 针对指定的合理有效的性能指标,所选择的变量在所有的变量可行集中效果最好. 3) 相应的变量选择算法应尽可能简易.

本文通过引入一种变量选择矩阵,给出了问题的统一数学表达式,在文[2,3]的基础上提出了两种合理的能控测度及能观测度,以适应系统综合的要求.在此基础上给出了基于能控能观测度的变量选择有效算法.

2 问题的描述及能控能观测度

考虑线性时不变多变量系统:

$$\mathrm{S}:\quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中,$x(t)\in \mathrm{R}^n$ 为系统的状态变量;$u(t)\in \mathrm{R}^m$,包含系统所有可行的操作变量;$y(t)\in \mathrm{R}^l$,包含系统所有可行的量测变量.A,B,C 有相应的维数.本文假定系统状态完全可控及可观,且系统矩阵 A 的特征值各异.

现假设要求从所有可行的 m 个操作变量及所有可行的 l 个量测变量中各选 p 个($p<m$, $p<l$),在保证所构成的系统状态可控及可观的同时,使系统的能控程度、能观程度最好,即衡量系统能控、能观程度的度量指标取值最优.

为描述的统一性,引入变量选择矩阵 $H_1\in \mathrm{R}^{m\times m}$, $H_2\in \mathrm{R}^{l\times l}$,满足:1) $H_i=\mathrm{diag}(h_{jj})$, $h_{jj}=0$ 或 1, $i=1,2$. 2) $\mathrm{tr}H_1=p$, $\mathrm{tr}H_2=p$.

通过选择矩阵 H_1,H_2 从 m 个操作变量及 l 个量测变量中各选 p 个以后,相应构成的系统可以表达成:

---

* 国家自然科学基金资助课题.
本文于1993年6月14日收到. 1994年5月9日收到修改稿.

$$\mathrm{S1:}\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + BH_1u(t),\qquad y(t) = H_2Cx(t). \tag{2.2}$$

系统S1的输入输出传递函数为：

$$y(t) = H_2C(sI - A)^{-1}BH_1u(t) = [\Phi(s)/\Delta(s)]u(t). \tag{2.3}$$

其中 $\Phi(s)=H_2C\mathrm{adj}(sI-A)BH_1$ 是 $l\times m$ 算子传函矩阵，$\Delta(s)=\det(sI-A)$ 是特征多项式，进一步定义两种算子矩阵：

$$\Phi_B(s) = \mathrm{adj}(sI - A)BH_1,\quad \Phi_C(s) = H_2C\mathrm{adj}(sI - A). \tag{2.4}$$

命题 2.1[3]　考虑多变量线性系统 $\mathrm{S1}(A,BH_1,H_2C)$，且 A 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互异，那么特征值 λ_i 不可控的充要条件是 $\Phi_B(\lambda_i)=0$，同样，特征值 λ_i 不可观的充要条件是 $\Phi_C(\lambda_i)=0$.

定义 2.1　考虑线性系统 $\mathrm{S1}(A,BH_1,H_2C)$，且 A 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互异，第 i 个特征值 λ_i 的能控测度 m_{Ci} 与能观测度 m_{oi} 分别定义为

$$m_{Ci} = \|\Phi_B(\lambda_i)\|_F, \tag{2.5}$$

$$m_{oi} = \|\Phi_C(\lambda_i)\|_F. \tag{2.6}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 为 Frobinus 范数.

定义 2.2　考虑线性系统 $\mathrm{S1}(A,BH_1,H_2C)$，且 A 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互异，则分别定义系统的两种能控测度及能观测度：

1) $m_C^I=\min\limits_i(m_{Ci})$；　$m_o^I=\min\limits_i(m_{oi})$. (2.7)

2) $m_C^{II}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}m_{Ci}^2\right)^{(1/2)}$；　$m_o^{II}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}m_{oi}^2\right)^{(1/2)}$. (2.8)

3　特征值能控能观测度的计算

设 $e_i,f_i\in C^n$ 分别为系统特征值 λ_i 的右与左特征向量，满足 $Ae_i=\lambda_ie_i$，$f_i^HA=\lambda_if_i^H$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 f_i^H 是 f_i 的共轭转置，满足：$f_i^He_i=1$，$f_i^He_j=0$，$(i\neq j)$，设 $E=[e_1,e_2,\cdots,e_n]$，$F=[f_1,f_2,\cdots,f_n]$，显然有：$F^HE=I_n$，$EF^H=I_n$，这样，$A=E\wedge F^H$，其中 $\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_i)$，$\lambda_i$ 为 A 的特征值，这样，有

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda_i) &= \mathrm{adj}(\lambda_iI - E\wedge F^H)BH_1\\ &= E\mathrm{adj}(\lambda_iI - \wedge)F^HBH_1\\ &= \sigma_ie_if_i^HBH_1.\end{aligned}$$

其中 $\sigma_i=\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)$，记 $B'=BH_1$，有

$$\begin{aligned}m_{Ci} &= |\sigma_i|\,\|e_if_i^HB'\|_F\\ &= |\sigma_i|[e_i^He_if_i^HB'(B')^Tf_i]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $(B')^T$ 为 B' 的转置，对特征向量 e_i 进行单位化，满足：$e_i^He_i=1$，这样有：

$$m_{Ci} = |\sigma_i|[f_i^HB'(B')^Tf_i]^{1/2}. \tag{3.3}$$

根据假设，系统S1的特征值互异，故 $|\sigma_i|\neq0$，这样可得出如下结论：

1) 如果特征向量 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实向量，当且仅当 f_i 与 B' 中所有列向量都正交时，$m_{Ci}=0$；如果 f_i 仅与 B' 中第 K 列向量正交，那么模态 λ_i 对于第 K 个操作变量 u_K 是不

可控的.

2）对于共轭复特征值对，$\lambda_i=\lambda_{i1}\pm j\lambda_{i2}$，设相应的特征向量为 $f_i=f_{i1}+jf_{i2}$，$f_i^H=f_{i1}^T-jf_{i2}^T$，这样，有

$$m_{Ci}=|\sigma_i|[f_{i1}^TB'(B')^Tf_{i1}+f_{i2}^TB'(B')^Tf_{i2}]^{1/2}. \tag{3.4}$$

特征值对$(\lambda_i,\bar{\lambda}_i)$不可控的充要条件是 f_{i1}，f_{i2}同时与 B' 中所有的列向量都正交.

模态 λ_i 的能观测度为

$$\begin{aligned} m_{oi}&=|\sigma_i|[f_i^Hf_ie_i^HC^TH_2Ce_i]^{1/2}\\ &=|\sigma_i|[f_i^Hf_ie_i^H(C')^TH_2Ce_i]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $C'=H_2C$，H_2 为量测变量选择矩阵，同样，对 f_i 进行单位化，满足：$f_i^Hf_i=1$，则有：

$$m_{oi}=|\sigma_i|[e_i^H(C')^TC'e_i]^{1/2}. \tag{3.6}$$

同样也可以得到与能控性结论相似的能观性结论.

4　操作变量及量测变量的选择

Ⅰ）基于第一种能控测度及能观测度的变量选择方法已知 $m_{Ci}=|\sigma_i|[f_i^HB'(B')^Tf_i]^{1/2}$ 则

$$m_C^{\mathrm{I}}=\min|\sigma_i|(f_i^HB'(B')^Tf_i)^{1/2}=\min|\sigma_i|\Big(\sum_{j=1}^{p}|f_i^Hb_j|\Big)^{1/2}.$$

其中，b_j 是由操作变量选择矩阵 H_1 从 B 中选择出来的非零列向量.

基于第一种能控测度的操作变量选择问题表达为：寻找最优选择矩阵 H_1，保证相应构成的系统状态能控，同时使得 m_C^{I} 取值最大. 即

$$\max_{H_1}\min|\sigma_i|\Big(\sum_{j=1}^{p}|f_i^Hb_j|\Big)^{1/2} \tag{4.1}$$

在给出操作变量选择方法之前，首先计算矩阵

$$G=[g_{ij}]_{n\times m}=[g_1,g_2,\cdots,g_m].$$

其中

$$g_{ij}=|\sigma_if_i^Hb_j|^2,\quad g_j=[g_{1j},g_{2j},\cdots,g_{nj}]^T.$$

相应基于第一种能控测度 m_C^{I} 的操作变量选择方法如下：

Step 1　计算 A 的特征值 λ_i，相应的左特征向量 f_i，右特征向量 e_i，以及 δ_i，

其中

$$\sigma_i=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

e_i，f_i 满足

$$e_i^He_i=1,\quad f_i^He_i=1.$$

Step 2　构成矩阵 $G=[g_{ij}]_{n\times m}=[g_1,g_2,\cdots,g_m]$，其中 $g_{ij}=|\sigma_if_i^Hb_j|^2$.

Step 3　按照每一列中最小元素从大到小的次序，对矩阵 G 的列重新排列，得到矩阵 G_1.

Step 4　取矩阵 G_1 中的前 p 列组成 $n\times p$ 维矩阵，将各行的元素相加求和，并比较结果的大小. 记取值最小所对应的行为第 k 行，相应的最小值记为 ε.

Step 5　从矩阵 G 的第 k 行 m 个元素中任取 p 个相加求和，其取法对应于 C_m^p 种操作变量选择矩阵. 对这 C_m^p 个求和结果从大到小进行排列，记为 $w_1,w_2,\cdots,w_q$，$q=C_m^p$，其对应的选择矩阵记为 $H_{11},H_{12},\cdots,H_{1q}$. 易知 Step 4 中所求的 ε 必为 w_i，$i=1,2,\cdots,q$ 中的一个，记为 w_r. 结合(4.1)式，经分析可知，最优选择矩阵只可能在对应于 w_i，$i=1,2,\cdots,r$ 的那

些 H_{1i} 中.

Step 6 根据 Step 5 中选择矩阵的排列，从 H_{11} 开始，完成下列工作：

Doagain 取定一种选择矩阵 H_{1i}，根据 H_{1i} 从矩阵 G 中取出相应的 p 列，组成 $n\times p$ 维的矩阵，然后每一行的元素相加求和，将取值最小的结果记为 ε_i. 比较 ε_i 与 w_{i+1} 的大小. 如果 $\varepsilon_i<w_{i+1}$，则这种选择矩阵 H_{1i} 即为针对于第一种能控测度的最优选择矩阵. 如果 ε_i，w_{i+1}，则再取定下一种选择矩阵，返回到 Doagain.

同样，由于 $m_{oi}=|\sigma_i|[e_i^H(C')^TC'e_i]^{1/2}$

$$m_o^{\mathrm{I}}=\min|\sigma_i|\Big(\sum_{j=1}^{p}|e_i^HC_j^T|^2\Big)^{1/2}.$$

其中，C_j^T 是根据量测变量选择矩阵 H_2 从量测矩阵 C 中选择出来的行向量. 根据 m_o^{I} 的量测变量的选取方法如同操作变量的选取方法.

Ⅱ）基于第二种能控测度及能观测度的变量选择方法已知 $m_{Ci}=|\sigma_i|[f_i^HB'(B')^Tf_i]^{1/2}$，则

$$m_C^{\mathrm{II}}=\Big(\sum_{i=1}^{n}m_{Ci}^2\Big)^{1/2}=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2\Big(\sum_{j=1}^{p}|f_i^Hb_j|^2\Big)\Big)^{1/2}.$$

其中 b_j 是由操作变量选择矩阵 H_1 从操作矩阵 B 中选择出来的非零列向量. 这样基于第二种能控测度的操作变量选择问题表达为：寻找最优选择矩阵 H_1，保证相应的系统依然能控，同时使得 m_C^{II} 取值最优. 即

$$\begin{aligned}\max_{H_1}m_C^{\mathrm{II}}&=\max_{H_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2\Big(\sum_{j=1}^{p}|f_i^Hb_j|^2\Big)\Big)^{1/2}\\&=\max_{H_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2\Big(\sum_{j=1}^{p}b_j^Tf_if_i^Hb_j\Big)\Big)^{1/2}\\&=\max_{H_1}\Big(\sum_{j=1}^{p}b_j^T\Big(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2f_if_i^H\Big)b_j\Big)^{1/2}\\&=\max_{H_1}\Big(\sum_{j=1}^{p}b_j^TWb_j\Big)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中 $W=\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2f_if_i^H$，$W\in\mathrm{R}^{n\times n}$，$b_j$ 为通过选择矩阵 H_1 从操作矩阵 B 中选择出来的列向量.

相应基于第二种能控测度 m_C^{II} 的操作变量选择方法为：

Step 1 计算 A 的特征值 λ_i，相应的左特征向量 f_i，右特征向量 e_i，以及 δ_i，其中

$$e_i^He_i=1,\quad f_i^He_i=1.$$

Step 2 计算矩阵 $W=\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2f_if_i^H$.

Step 3 计算 $b_j^TWb_j$，$j=1,2,\cdots,m$，将取值从大到小排列，节取前面大的 p 个，相应的 b_j 对应的操作变量即为所求. 同样，

$$m_{oi}=|\sigma_i|[e_i^H(C')^TC'e_i]^{1/2},$$

$$m_o^{\mathrm{II}}=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|^2\Big(\sum_{j=1}^{p}|e_i^HC_j^T|^2\Big)\Big)^{1/2}.$$

其中 C_j^T 是根据量测变量选择矩阵 H_2 从量测矩阵 C 中选择出来的行向量. 根据 m_o^{II} 的量测变量的选取方法如同操作变量的选取方法.

5 结　论

本文讨论了工业过程控制系统中操作变量、量测变量的选择问题，通过引入变量选择矩阵，将问题作了统一的数学表达，提出了两种能够为多变量系统的能控性、能观性提供量相对量化信息的能控及能观测度，并在此基础上给出了变量选择的有效算法，避免了复杂计算，其计算量比现有各种有效的变量选择算法大大减少，因而在理论及实际应用上都有一定的价值. 该方法可用于工业过程控制系统的结构综合设计中.

参 考 文 献

[1] Morari, M., Arkun, Y. and Stephanoupoulos, G.. Studies in the Synthesis of Control Structures for Chemical Processes. AIChE. J, 1980, 26(3):220—255

[2] Lindner, D. K., Babendrerier, J. and Hamdan, A. M. A.. Measures of Controllability and Observability and Residues. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(5):648—650

[3] Tarokh, M.. Measures for Controllability, Observability and Fixed Modes. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(8):1268—1273

Measures for Controllability, Observability and Selection of Variables for Multivariable Control Systems

LI Kang　and　XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: In this paper, the problem of selecting manipulated variables and measurement variables is discussed in detail. A kind of socalled selection matrix is introduced to describe the selection problem in a general mathematical form. Two kinds of measures are used to provide quantative information for controllability and observability of linear multivariable systems, and effective algorithms have been suggested to search proper variables according to these measures which seem to be advantageouse on calculation burden in comparing with other methods appeared. This selection method can be used in synthesis and analysis of control systems.

Key words: multivariable control system; controllability measure; observability measure; selection of variables

本文作者简介

李　慷　1968 年生. 1992 年哈尔滨工业大学获硕士学位，现为上海交通大学博士研究生. 研究方向为工业过程的建模、控制及优化.

席裕庚　1946 年生. 1968 年毕业于哈尔滨军事工程学院，1984 年在德国获工学博士学位，现为上海交通大学自动控制系教授，控制理论及应用博士生导师. 著有动态大系统方法导论，预测控制等书. 主要从事复杂系统控制理论的研究. 目前主要研究领域是复杂工业过程的优化控制及智能机器人控制.