

# 解耦鲁棒控制器的一种频域设计方法

刘泓涛 陈宗基

(北京航空航天大学自动控制系统, 100083)

**摘要:** 本文研究解耦控制系统的一种频域设计方法, 分析了系统解耦的鲁棒性. 在此基础上, 设计出具有解耦鲁棒性的控制器. 最后, 以某型号飞机的直接力控制系统为例做了仿真验证.

**关键词:** 频域方法; 解耦; 鲁棒性; 直接力控制

## 1 引言

现代控制系统往往需要处理复杂的具有强耦合性的对象, 如果采取解耦控制来消除系统的耦合效应, 就可以使这样的系统的分析和设计变得简便. 本文试图在频域范围内, 用求解多项式矩阵方程的方法设计多变量系统的解耦控制器. 但由于该方法是基于对系统数学模型的精确描述, 故对系统的扰动或模型的不确定性敏感性大, 为此本文进一步分析了解耦控制系统的鲁棒性, 并设计出具有解耦鲁棒性的控制器.

## 2 多变量频域方法解耦控制器设计

考虑线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $x \in R^n, u, y \in R^p$ , 系统的传递函数矩阵为

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (2.2)$$

系统采用如图 1 所示的输入-输出反馈控制方案, 其中,  $G_r(s) = N_p(s)D_r^{-1}(s)$  是一个右互质分解式.

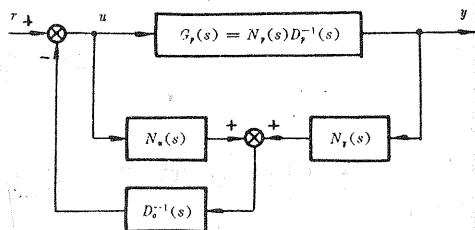


图 1 输入-输出反馈控制结构

图 1 所示系统的闭环传递函数矩阵为

$$G_f(s) = N_p(s)[D_c(s)D_p(s) + N_u(s)D_p(s) + N_y(s)N_p(s)]^{-1}D_c(s). \quad (2.3)$$

选取  $D_f(s) = \text{diag}[d_{fi}(s), i \in p]$  和  $D_c(s) = \text{diag}[d_{ci}(s), i \in p]$  为对角形式, 如果系统满足

$$D_c(s)D_p(s) + N_u(s)D_p(s) + N_y(s)N_p(s) = D_f(s)N_p(s), \quad (2.4)$$

则闭环传递函数矩阵

$$\begin{aligned} G_f(s) &= D_f^{-1}(s)D_c(s) \\ &= \text{diag}[d_{ci}(s)/d_{fi}(s), i \in p] \end{aligned} \quad (2.5)$$

为一对角矩阵, 那么系统就是输入-输出解耦的. 有关的定理参见[1].

## 3 解耦鲁棒控制器设计

用现代控制理论设计的解耦控制系统, 基于对象数学模型的精确描述, 对系统的扰

动或模型的不确定性敏感性大,必须进行鲁棒设计.下面首先提出解耦鲁棒的概念.

**定义 3.1** 一个解耦系统,在不确定性扰动下,如果因扰动引起的耦合效应能够被限制在某一允许的范围内,或者说它具有可接受的解耦度,那么仍然可以认为该系统保持了解耦的能力,并称这样的系统是解耦鲁棒的.

对本文所讨论的用频域方法设计的解耦控制系统,进一步定义为

**定义 3.2** 一个不确定或受扰的多变量系统的传递函数矩阵

$$\tilde{G}_f(s) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \cdots & \tilde{g}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{p1} & \cdots & \tilde{g}_{pp} \end{bmatrix}.$$

如果满足

$$|\tilde{g}_{ji}| \leq \frac{1}{\sigma} |\tilde{g}_{ii}|, \quad j = 1, \dots, p, \quad j \neq i. \quad (3.1)$$

其中  $\sigma \geq 1$ , 那么系统就称为  $\sigma$ -解耦鲁棒的.  $\sigma$  是一个反映解耦鲁棒程度的量, 称为系统的鲁棒度.

根据以上的定义, 就可以分析系统的解耦鲁棒性了. 下面对  $N_p(s)$  和  $D_p(s)$  受到扰动

### 3.1 $D_p(s)$ 扰动情况下的解耦鲁棒性

首先得到  $D_p(s)$  扰动下闭环传递函数矩阵的描述.

**引理 3.1** 当  $D_p(s)$  受到扰动

$$\tilde{D}_p(s) = D_p(s) + \Delta D_p(s), \quad (3.2)$$

则受扰后的闭环传递函数矩阵为

$$\tilde{G}_f(s) = [I + N(s)\delta D_p(s)]^{-1} G_f(s). \quad (3.3)$$

其中  $\delta D_p(s) = \Delta D_p(s) N_p^{-1}(s)$ ,  $N(s) = D_f^{-1}(s)[D_c(s) + N_u(s)]$ .

证明从略.

**定义 3.3** 如果

$$|\delta_{ij}| \leq \frac{1}{\mu}, \quad (\mu > 0, \forall i, j = 1, \dots, p). \quad (3.4)$$

其中  $\delta_{ij}$  是  $\delta D_p(s)$  的第  $i$  行第  $j$  列元素, 那么  $\mu$  是反映系统允许扰动范围大小的一个量, 称为  $D_p(s)$  的鲁棒范围.

于是, 对系统解耦鲁棒性的分析, 就可定量地从鲁棒度和鲁棒范围两个方面入手.

**定理 3.1** 定义  $\|N(s)\| = \|D_f^{-1}(s)(D_c(s) + N_u(s))\|$  为  $N_p(s)$  的(解耦)鲁棒性指标, 其中矩阵范数  $\|\cdot\|$  定义为  $\|x\| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |x_{ij}|$ . 当指标满足

$$\|N(s)\| \leq \frac{\mu}{W}, \quad (3.5)$$

系统(2.3)就是  $W$ -解耦鲁棒的.

证 假定  $n_{ik}$  是  $N(s)$  的元素,  $x_{ji}$  是矩阵  $N(s)\delta D_p(s)$  的元素, 于是对  $\forall j = 1, \dots, p$ , 有

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^p n_{ik}(s) \delta_{kj}(s).$$

进一步,根据(3.5)式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p |x_{ij}| &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p |n_{ik}| |\delta_{kj}| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \|N(s)\| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \frac{\mu}{W} = \frac{1}{W}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i}^p |x_{ij}| &\leq \frac{1}{W} - |x_{ii}| \\ &\leq \frac{1}{W} (1 - |x_{ii}|) \\ &\leq \frac{1}{W} |1 + x_{ii}|. \end{aligned}$$

显然,  $1 + x_{ii}$  是  $(I + N(s)\delta D_p(s))$  的对角元素, 故矩阵  $(I + N(s)\delta D_p(s))$  是行对角优势的.

令

$$\sum_{j=1, j \neq i}^p |x_{ij}| = d_i.$$

因为  $(I + N(s)\delta D_p(s))$  是对角优势的, 那么它的逆一定存在, 并且有

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{ji}| &\leq \frac{d_i}{|x_{ii}|} |\hat{x}_{ii}| \\ &\leq \frac{1}{W} |\hat{x}_{ii}|, \quad \forall j = 1, \dots, p, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

其中  $\hat{x}_{ji}$  是矩阵  $(I + N(s)\delta D_p(s))^{-1}$  的元素.

记

$$A = [a_{ij}] = [I + N(s)\delta D_p(s)]^{-1}.$$

现在考虑受扰后的系统(3.3)式. 可以改写为

$$\tilde{G}_f(s) = AG_f(s).$$

由于  $G_f(s)$  是对角的,  $G_f(s) = \text{diag}[g_{ii}(s), i \in p]$ , 显然, 受到扰动后的传递函数矩阵元素有

$$\tilde{g}_{ji} = a_{ji} g_{ii}.$$

其中  $\tilde{g}_{ji}$  是  $\tilde{G}_f(s)$  的元素. 于是得到

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_{ji}| &= |a_{ji}| |g_{ii}| \\ &\leq \frac{1}{W} |a_{ii}| |g_{ii}| \\ &= \frac{1}{W} |\tilde{g}_{ii}|. \end{aligned}$$

根据定义 3.2, 系统在  $D_p(s)$  受到扰动后仍是  $W$ -解耦鲁棒的. 证毕.

### 3.2 $N_p(s)$ 扰动情况下的解耦鲁棒性

类似地, 对于  $N_p(s)$  扰动情况下的解耦鲁棒性有如下的定理.

**定理 3.2** 定义  $\|M(s)\| = \|D_f^{-1}(s)N_p(s)\|$  为  $N_p(s)$  的(解耦)鲁棒性指标. 其中矩阵范数  $\|\cdot\|$  定义为  $\|x\| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |x_{ij}|$ . 并且定义  $N_p(s)$  扰动下系统的鲁棒范

1 期

围  $\mu$  满足

$$|\delta_{ij}| \leq \frac{1}{\mu}, (\mu > 0, \forall i, j = 1, \dots, p), \quad (3.6)$$

和

$$\mu \geq \frac{(\sigma + 1)(p + W - 1)}{W - \sigma}. \quad (3.7)$$

当指标满足

$$\|M(s)\| \leq \frac{\mu}{W}, \quad (3.8)$$

系统(2.3)就是解耦鲁棒的.

进一步分析(3.5)式,发现:当  $\mu$  不变时,  $\|N(s)\|$  越小,  $W$  可以越大,意味着系统解耦鲁棒的程度越高. 当  $W$  不变时,  $\|N(s)\|$  越小,  $\mu$  可以越小,意味着系统允许扰动的范围越大. 于是,可以设计控制律使得  $\|N(s)\|$  或  $\|M(s)\|$  最小,使得其对应的鲁棒范围最大,即得到了一个解耦鲁棒的控制器.

记方程(2.4)为

$$f(N_u, N_y, D_c, D_f) = 0, \quad (3.9)$$

性能指标为

$$g(N_u, N_y, D_c, D_f) = \|N(s)\|. \quad (3.10)$$

于是解耦鲁棒的控制律设计问题则变为

$$\begin{cases} f(N_u, N_y, D_c, D_f) = 0, \\ J_{op} = \min(\|N(s)\|) \end{cases} \quad (3.12)$$

这样一个典型的非线性参数最优化问题.

## 4 设计实例

本文采用文献[2]提供的某型号战斗机直接力控制系统的运动方程: ( $H = 3000\text{ft}$ ,  $M = 0.6$ )

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.86939 & 43.223 & -17.251 & -1.5766 \\ 0 & 0.99335 & -1.3411 & -0.16897 & -0.25183 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} u, \quad (4.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (4.2)$$

其中状态  $x = [\theta \ q \ \alpha \ \delta_e \ \delta_f]^T$ , 输入  $u = [\delta_{ec} \ \delta_{fc}]^T$ , 输出  $y = [\theta \ \gamma]^T$ .

$\gamma, \theta, q, \alpha, \delta_e, \delta_f$  分别表示航迹角, 姿态角, 俯仰速率, 攻角, 升降舵偏角和副翼偏角.

指令输入  $v = [\theta_c \ \gamma_c]^T$ . 当  $v = [\theta_c \ 0]^T$  时, 飞机只改变姿态角而不改变航迹角, 飞机处于俯仰指向(pitch pointing)模态. 当  $v = [0 \ \gamma_c]^T$  时, 飞机只改变航迹角而不改变姿态角, 飞机处于垂直平移(vertical translation)模态.

系统对象传递函数矩阵的右互质分解式  $G_p(s) = N_p(s)D_p^{-1}(s)$  为

$$\begin{bmatrix} -34 & 0 \\ 5.44s - 40 & -51.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 20 & s^2 + 28.25s + 165 \\ 1.08s^3 + 15.01s^2 - 130s - 46.8 & -11s^2 - 238.6s - 386 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.3)$$

求解方程(2.4)得到控制律:

$$D_c(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 2 & 0 \\ 0 & s^2 + 4s + 2 \end{bmatrix},$$

$$N_u(s) = \begin{bmatrix} -400s^2 + 1210s - 105760 & -31s^2 - 70s - 45166 \\ 4s^2 + 72s - 12421 & -365.5s^2 - 1375.4s - 5951.1 \end{bmatrix},$$

$$N_y(s) = \begin{bmatrix} -3779.4s^2 - 9505.5s + 114.1 & 7760s^2 + 155920s + 0.0 \\ -411.4s^2 + 72.1527s + 736.7815 & 915s^2 + 18279s + 0.0 \end{bmatrix}.$$

鲁棒性指标:  $\|N(j\omega)\| = 5.8563$ . 鲁棒范围:  $|\delta_{ij}| \leq 1.7\%$ .

在没有扰动的情况下,系统的解耦效果是好的,实现了直接力控制.而在  $D_p(s)$  扰动下\*,取超出扰动范围的值  $\Delta_{2,2} = 0.3$ ,系统就不能保证解耦,甚至发散(见图 2).

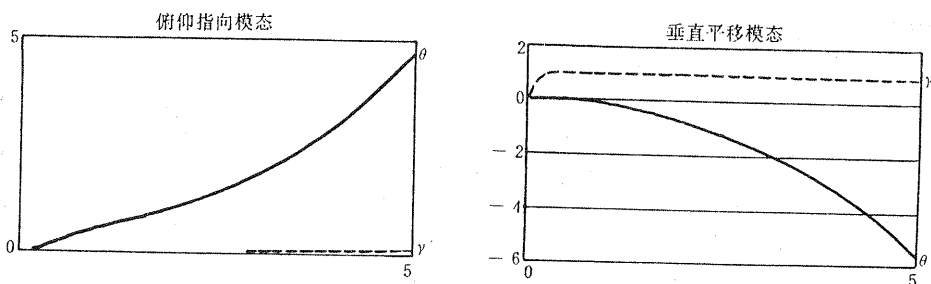


图 2 扰动范围过大时系统发散

用单纯形寻优方法设计的解耦鲁棒控制器为

$$D_c^*(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 496.2s + 1221 & 0 \\ 0 & s^2 + 496.2s + 1221 \end{bmatrix},$$

$$N_u^*(s) = \begin{bmatrix} -400s^2 - 193400s + 1216000 & -30s^2 - 15570s + 545370 \\ 4s^2 + 1848s + 47091 & -370s^2 - 181260s - 371540 \end{bmatrix},$$

$$N_y^*(s) = \begin{bmatrix} 114650s^2 + 575280s + 59630 & -111600s^2 - 2244600s + 0.0 \\ 12890s^2 + 66880s + 448640 & -6500s^2 - 129430s + 0.0 \end{bmatrix}.$$

在同样大的扰动下,系统仍然保证了满意的解耦效果(见图 3).

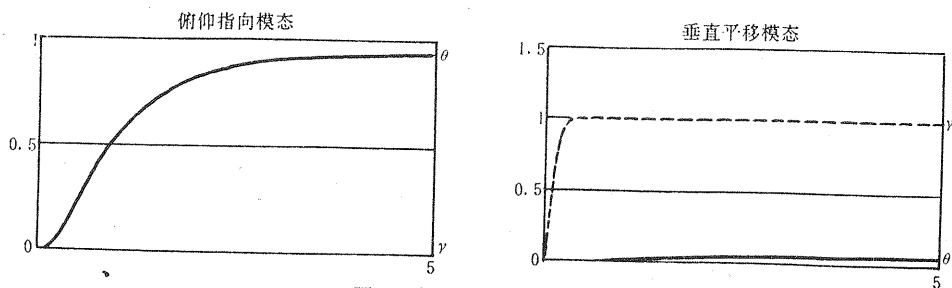


图 3 鲁棒解耦下系统稳定

\*  $N_p(s)$  扰动情况是一样的,这里从略.

## 5 结 论

本文提出了控制系统的解耦鲁棒性的概念,讨论了频域范围内解耦鲁棒控制器的设计方法.事实上,本文提供的设计方法,其目的是使系统解耦鲁棒范围最大,在实际工程设计中,也可根据指定的鲁棒范围和鲁棒度进行参数优化设计,方法是完全类似的.另外,本文为了分析和讨论的方便,分别研究了  $N_r(s)$  和  $D_r(s)$  的扰动情况.对于二者同时扰动情况的分析,尚有待今后进一步研究.

## 参 考 文 献

- [1] 徐和生,陈锦娣.多变量系统的分析和设计.北京:国防工业出版社,1989
- [2] Sobel, K. M. and Shapiro E. Y.. A Design Methodology for Pitch Pointing Flight Control System. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1985,18(2):

## A Frequency-Domain Method for Designing Robust Decoupling Controllers

LIU Hongtao and CHEN Zongji

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics & Astronautics • Beijing, 100083, PRC)

**Abstract:** In this paper, the design problem of multivariable decoupling systems is discussed with a frequency-domain method. Emphasis is placed on the analysis of decoupling robustness and the synthesis of decoupling robust controllers. A direct force control (DFC) system of an aircraft model is designed to show the approach.

**Key words:** frequency-domain; decoupling; robustness; DFC

### 本文作者简介

刘泓涛 1969年生,1991年毕业于上海交通大学,获学士学位.现在是北京航空航天大学硕士研究生.主要研究方向是鲁棒控制、现代飞行控制系统等.

陈宗基 1943年生,1966年毕业于北京航空学院,1980、1983年分别获英国曼彻斯特大学硕士、博士学位.现任北京航空航天大学自控系教授、博士生导师.主要研究方向是自适应、自学习、自组织系统,现代飞行器控制,鲁棒控制等.近年来在国内外发表论文45篇,出版专著两本.