第12卷第2期
1995年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 2
Apr., 1995

分段线性函数应用于延时系统的最优控制*

胡克定　王树松
(东南大学自动化所·南京，210096)

摘要：本文把分段线性函数引入到求解延时系统的最优控制中，推得延时线性系统二次型最优控制问题的分段控制解答及其状态轨线估计．算例结果表明，该算法比方块脉冲函数算法具有更高的计算精度．

关键词：分段线性函数；延时系统；最优控制

1 引　言

关于延时系统基于二次型性能指标的最优控制的求解，已有不少算法．一些文献，如文献[1]，采用把低阶时延系统近似转化为求解高阶的非时延系统的最优控制，使得在递推黎卡提方程的解时，消耗大量计算机内存和机时，文献[2,3]采用泛函寻优的方法，需要迭代求解延时微分方程的两点边值问题，占用一定内存和机时，而且对于大时延系统，精度不易保证．文献[4]利用沃尔什函数进行了分析，虽不需迭代，但要求控制时间分段个数必须是2的正整数．文献[5,6]用方块脉冲函数解决了此问题．方块脉冲函数的核心就是：定义在$[0,T]$上的任意绝对可积函数的阶梯逼近，而从数值逼近角度而言，函数的分段线性逼近效果优于函数的阶梯逼近[7]，本文正是鉴于此，把分段线性函数应用于求解延时系统的最优控制，从而推出了精度更高的求解算法．

2 分段线性函数及其性质

定义在$[0,T]$的含有$(N+1)$个分量的分段线性函数族为

$$\psi_0(t)=\begin{cases}1-Nt/T, & 0\leqslant t\leqslant T/N,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$\psi_i(t)=\begin{cases}(1-i)+Nt/T, & (i-1)T/N\leqslant t\leqslant iT/N,\\ (1+i)-Nt/T, & iT/N\leqslant t\leqslant (i+1)T/N,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$\psi_N(t)=\begin{cases}(1-N)+Nt/T, & (N-1)T/N\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N-1.$$

性质1　任意连续函数$y=f(t)$可由分段线性函数族近似表示

$$f(t)=\sum_{i=0}^{N}f_i\psi_i(t)=\bar{f}\psi(t). \tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助课题．
本文于1993年12月27日收到．1994年6月27日收到修改稿．

其中 $f_i = f(iT/N)$， $\bar{f} = [f_1, f_1, \cdots f_N]$， $i = 0,1,\cdots,N$，

$\psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \cdots, \psi_N(t)]^{\mathrm{T}}$.

性质 2

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \psi_i(t) = e^{\mathrm{T}}\psi(t). \tag{2}$$

其中

$$e = [1, 1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}.$$

性质 3

$$\int_t^T \psi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{T}{N} E_1 \psi(t). \tag{3}$$

其中

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & 0 & & \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}.$$

性质 4

$$\int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{T}{N} E_2 \psi(t). \tag{4}$$

其中

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & \frac{1}{2} & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}.$$

以上性质证明可参考文献[7]，略.

3 最优控制求解

考虑延时线性系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) + CX(t-\tau_i) + Du(t-\tau_h), \\ X(t) \overset{\triangle}{=} X(t), \quad -\tau_l \leqslant t \leqslant 0, \\ u(t) \overset{\triangle}{=} U \quad -\tau_h \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

其中状态向量 $X(t) \in \mathrm{R}^{n\times 1}$，控制向量 $u(t) \in \mathrm{R}^{r\times 1}$，$\tau_l, \tau_h \geqslant 0$ 分别为状态时延和控制时延，A, B, C, D 是与之相容的常数矩阵.

性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [X^{\mathrm{T}}(t)QX(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t. \tag{6}$$

其中 Q 为 n 阶半正定对称矩阵，R 为 r 阶正定对称矩阵

问题就是求在延时系统(5)下，使二次型性能指标(6)达到最小的最优控制律. 根据文献[8]，最优控制 $u(t)$ 及其状态轨线满足

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + A^{\mathrm{T}}P(t) + C^{\mathrm{T}}P(t+\tau_l) + QX(t) = 0, \\ Ru(t) + B^{\mathrm{T}}P(t) + D^{\mathrm{T}}P(t+\tau_h) = 0, \\ P(t) = 0,\ t \geqslant T. \end{cases} \tag{7}$$

把(5)，(7)式中所含函数分别按(1)式进行分段线性函数展开

$$\begin{aligned} &X(t) = \overline{X}\psi(t),\ X(t-\tau_l) = \overline{X}_l\psi(t), \\ &u(t) = \overline{U}\psi(t),\ u(t-\tau_h) = \overline{U}_h\psi(t), \\ &P(t) = \overline{P}\psi(t),\ p(t+\tau_l) = \overline{P}_l\psi(t), \\ &P(t+\tau_h) = \overline{P}_h\psi(t). \end{aligned} \tag{8}$$

取正整数 l 与 h 及 $0 \leqslant \alpha_l, \alpha_h < 1$ 满足

$$\tau_l = (l+\alpha_l)\frac{T}{N},\quad \tau_h = (h+\alpha_h)\frac{T}{N}.$$

令

$$H_l = (1-\alpha_l)\Delta^l + \alpha_l\Delta^{l+1},\quad H_h = (1-\alpha_h)\Delta^h + \alpha_h\Delta^{h+1}.$$

其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}.$$

可以证明

$$\begin{cases} \overline{X}_l = \overline{X}H_l + \hat{X},\quad \overline{U}_h = \overline{U}H_h + \hat{U}, \\ \overline{P}_l = \overline{P}H_l^{\mathrm{T}},\quad \overline{P} = \overline{P}H_h^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{X} = [&X(-(l+\alpha_l)\frac{T}{N}), X(-(l-1+\alpha_l)\frac{T}{N}), \cdots, \\ &X(-(1+\alpha_l)\frac{T}{N}), X(-\alpha_l\frac{T}{N}) - (1-\alpha_l)X(0), \underbrace{0,\cdots,0}_{N-l}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{U} = [&u(-(h+\alpha_h)\frac{T}{N}), u(-(h-1+\alpha_h)\frac{T}{N}), \cdots, \\ &u(-(1+\alpha_h)\frac{T}{N}), u(-\alpha_h\frac{T}{N}) - (1-\alpha_h)u(0), \underbrace{0,\cdots,0}_{N-h}]. \end{aligned}$$

与文献[6]推导过程类似，联接式(5)，(7)，(8)，(9)，由性质(2)，(3)，(4)并利用矩阵的 Kronecker 乘积，最后可以求得

$$\begin{cases} X = (I_{n(N+1)} + L^{-1}FY^{-1}ZM^{-1}K)^{-1}L^{-1}W, \\ U = -(Y + ZM^{-1}KL^{-1}F)^{-1}ZM^{-1}KL^{-1}W. \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$X = [X_0^{\mathrm{T}}, X_1^{\mathrm{T}}, \cdots, X_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad U = [U_0^{\mathrm{T}}, U_1^{\mathrm{T}}, \cdots, U_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$L = \frac{N}{T}I_{n(N+1)} - E_2^{\mathrm{T}} \otimes A - (E_2^{\mathrm{T}}H_l^{\mathrm{T}}) \otimes C, \quad F = E_2^{\mathrm{T}} \otimes B + (E_2^{\mathrm{T}}H_h^{\mathrm{T}}) \otimes D,$$

$$M = -\frac{N}{T}I_{n(N+1)} + E_1^{\mathrm{T}} \otimes A^{\mathrm{T}} + (E_1^{\mathrm{T}}H_l) \otimes C^{\mathrm{T}}, \quad K = -E_1^{\mathrm{T}} \otimes Q,$$

$$Y = I_{N+1} \otimes R, \quad Z = I_{N+1} \otimes B^{\mathrm{T}} + H_h \otimes D^{\mathrm{T}},$$

$$W = (E_2^{\mathrm{T}} \otimes C)\hat{\hat{X}} + (E_2^{\mathrm{T}}) \otimes D)\hat{\hat{U}} + \frac{N}{T}\hat{\hat{X}}_0,$$

$$\hat{\hat{X}} = [X(-(l+\alpha_l)\frac{T}{N}^{\mathrm{T}}, X(-(l-1+\alpha_l)\frac{T}{N})^{\mathrm{T}}, \cdots,$$

$$X(-(l+\alpha_l)\frac{T}{N})^{\mathrm{T}}, X(-\alpha_l\frac{T}{N})^{\mathrm{T}} - (1-\alpha_l)X(0)^{\mathrm{T}}, \underbrace{0^{\mathrm{T}}, \cdots, 0^{\mathrm{T}}}_{N-l}]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\hat{U}} = [u(-(h+\alpha_h)\frac{T}{N})^{\mathrm{T}}, u(-(l-1+\alpha_h)\frac{T}{N})^{\mathrm{T}}, \cdots,$$

$$u(-(1+\alpha_h)\frac{T}{N})^{\mathrm{T}}, u(-\alpha_h\frac{T}{N})^{\mathrm{T}} - (1-\alpha_h)u(0)^{\mathrm{T}}, \underbrace{0^{\mathrm{T}}, \cdots, 0^{\mathrm{T}}}_{N-h}]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\hat{X}}_0 = [X\underbrace{(0)^{\mathrm{T}}, X(0)^{\mathrm{T}}, \cdots, X(0)}_{N-l}{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

$I_{n(N+1)}, I_{N+1}$ 分别为 $n(N+1), N+1$ 阶单位阵.

由 X, U 即可求得

$$\begin{cases} \bar{X} = [X_0, X_1, \cdots, X_N], \\ \bar{U} = [U_0, U_1, \cdots, U_N], \end{cases} \tag{11}$$

继而即可得延时系统(5)的最优控制律及状态轨线估计

$$\begin{cases} u(t) = \bar{U}\psi(t), \\ x(t) = \bar{X}\psi(t). \end{cases} \tag{12}$$

4　数值算例

考虑文献[5]中的例子,求解延时系统最优控制问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) + u(t), & \\ x(t) = 1, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ u(t) = 0, & t \leqslant 0, \\ J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 (x^2 + u^2)\mathrm{d}t. & \end{cases}$$

取分段数 $N = 7$,根据本文算法可求得最优控制律 $u(t)$,如图1中线1所示,从图1可以看出,本文算法的效果明显优于文献[5]的方块脉冲函数算法(取

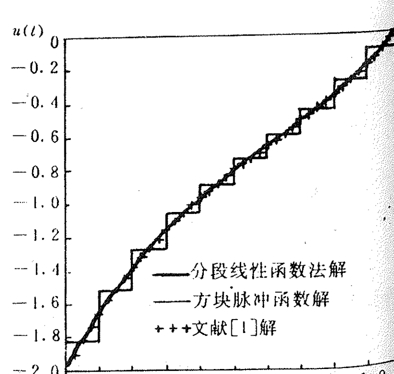

图1　控制律 $u(t)$

分段数为 8)，进一步算得本文算法所得到性能指标值 $J = 1.6495$，非常接近文献[1]算法(取 $N = 20$) 下的 J 值 1.64690) 而小于方块脉冲函数算法下的 1.6536，也小于文献[4]中用沃尔什算法(取分段数为 8，这时 $m = 3$) 所得到的性能指标值 1.6532.

5 结　论

本文把分段线性函数应用于延时系统最优控制，与方块脉冲函数算法以及沃尔什函数算法比，计算量稍微大些，但其良好的分段线性逼近特性决定了算法精度要高于后两种，同时，其对初值的要求是离散值，也为计算带来了方便，本文算法的精度，可通过增大分段数来保证.

参 考 文 献

[1] Banks, H. T. and Burns, J. A.. Hereditary Control Problems: Numerical Methods Based and Averaging Approximations. SIAM. J. Control & Optimiz, 1978, 16: 169—208

[2] Palanisamy, K. R. and Rao, G. P.. Optimal Control of Linear Systems with Delays in State and Control via Walsh Functions. Proc, IEE. 1983, 130:300—312

[3] Jamshidi, and Malek-Zararei. Suboptimal Design of Linear Control Systems with Time Delay. Proc. IEE. 1972, 119: 1743—1746

[4] 童调生，陈明武，张海沙. 多时延系统最优控制的沃尔什变换算法. 控制理论与应用，1988, 5(3): 92—99

[5] 陈明武，童调生. 一种采用方块脉冲函数求解延是最优控制问题的算法. 自动化学报，1988, 14(6):458—462

[6] 王兴涛，邢继祥. 延时系统最优控制的方块脉冲函数新算法，控制理论与应用，1992, 9(5):560—565

[7] 古天龙，徐国华. 分段线性函数应用于线性时变系统的最优控制. 控制理论与应用，1989, 6(4):102—108

Optimal Control of Time Delay Systems Using Segmental Linear Functions

HU Keding　and　WANG Shusong

(Research Institute of Automation, Southeast University • Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: In the paper, by applying some good properties of segmental linear functions to the optimal control of time delay systems with a quadratic performance index, gain of the piecewise solutions of optimal control and the estimation of state. The example results prove the new algorithms are better than that of BPF in accuracy.

Key words: segmental linear functions; time delay systems; optimal control

本文作者简介

胡克定　1944 年生. 1968 年毕业于北京大学数力系，现为东南大学自动化研究所教授. 研究方向为复杂工业系统的鲁棒控制、H_∞最优设计方法和线性系统理论.

王树松　1970 年生. 1992 年毕业于郑州大学电子系，获工学学士学位，现正在东南大学自动化研究所攻读硕士学位. 研究方向为最优控制，工业过程控制应用.