

多通道最优和自校正去卷估值器*

邓自立

张焕水

(黑龙江大学庆用数学研究所·哈尔滨, 150080) (东北大学自动化研究中心·沈阳, 110006)

摘要: 基于白噪声估计理论, 对于通过带有色观测噪声的线性系统被观测的多变量 ARMA 输入信号, 本文提出了最优和自校正去卷新方法, 可统一处理去卷滤波、预报和平滑问题, 可处理非平稳 ARMA 输入信号及不稳定和/或非最小相位系统. 仿真例子说明了其有效性.

关键词: 去卷; 输入估计; 多变量 ARMA 输入信号; 有色观测器; 最优和自校正去卷

1 引言

去卷也叫反卷积或输入估计, 广泛应用于通讯、信号处理、反射地震学、雷达跟踪等领域. 已报道的多变量 ARMA 信号去卷的一些结果^[1~5], 尚有一定局限性: 或要求输入信号的平稳性^[1], 或要求观测系统是稳定的和最小相位的^[1], 或只处理去卷滤波问题^[2~5]. 本文基于白噪声估计理论提出了最优和自校正去卷新方法, 克服了上述局限性.

2 稳态最优去卷估值器

考虑多变量 ARMA 信号 $s(t)$, $A(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})w(t)$ (1)

它作为如下线性系统的输入信号被间接观测,

$$y(t) = z(t) + r(t), \quad (2)$$

$$P(q^{-1})z(t) = B(q^{-1})s(t). \quad (3)$$

其中有色观测噪声 $r(t)$ 为 ARMA 信号,

$$M(q^{-1})r(t) = N(q^{-1})v(t). \quad (4)$$

并且 $A(q^{-1}), \dots, N(q^{-1})$ 是如下形式的多项式矩阵

$$X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}. \quad (5)$$

其中 q^{-1} 是单位滞后算子, $q^{-1}s(t) = s(t-1)$, X_i 是 $m \times m$ 系数阵, $y(t)$ 是 $m \times 1$ 维输出, $s(t)$ 是 $m \times 1$ 维输入, $w(t)$ 和 $v(t)$ 是 $m \times 1$ 维零均值, 方差各为 Q_w 和 Q_v 的独立的白噪声, $A_0 = P_0 = M_0 = I_m$ ($m \times m$ 单位阵), $C_0 = 0, B_0 = 0$ (零阵), n_x 是阶次, 设 $n_c \leq n_a, n_b \leq n_x, n_n \leq n_m$, 且设 $P(q^{-1}), B(q^{-1}), M(q^{-1}), N(q^{-1})$ 和 Q_v 是已知的. 当 $A(q^{-1}), C(q^{-1})$ 和 Q_w 已知时, 最优去卷问题是: 基于观测 $(y(0), \dots, y(t+k))$ 求 $s(t)$ 的稳态最优 (线性最小方差) 估值器 $\hat{s}(t/t+k)$. 当 $A(q^{-1}), C(q^{-1})$ 和 Q_w 未知时, 自校正去卷问题是: 求渐近最优估值器 $\hat{s}(t/t+k)$. 对 $k > 0, k = 0, k < 0$, 分别称 $\hat{s}(t/t+k)$ 为平滑器, 滤波器和预报器.

2.1 ARMA 新息模型

由伴随矩阵定义, $\text{adj } B(q^{-1})$ 可表示为

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1994 年 3 月 7 日收到. 1994 年 7 月 18 日收到修改稿.

2 期

$$\text{adj } B(q^{-1}) = q^{-(m-1)}[L_0 + L_1 q^{-1} + \cdots + L_{n_2} q^{n_2}] \triangleq q^{-(m-1)} L(q^{-1}). \quad (6)$$

$$\text{由(2)~(4)式有 } y(t) = P^{-1}(q^{-1})B(q^{-1})s(t) + M^{-1}(q^{-1})N(q^{-1})v(t). \quad (7)$$

$$(7) \text{式先后左乘以 } P(q^{-1}), \det M(q^{-1}), \text{adj } B(q^{-1}), A(q^{-1}) \text{ 和 } q^{(m-1)}L_0^{-1}, \text{并用(1), (6)式有}$$

$$\Lambda(q^{-1})y(t) = \Phi(q^{-1})w(t) + \Psi(q^{-1})v(t). \quad (8)$$

其中假设 $(\Lambda(q^{-1}), \Phi(q^{-1}), \Psi(q^{-1}))$ 左素, 且记

$$\Lambda(q^{-1}) = L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})\det M(q^{-1})P(q^{-1}), \quad \Lambda_0 = I_m, \quad (9a)$$

$$\Phi(q^{-1}) = L_0^{-1}\det M(q^{-1})L(q^{-1})B(q^{-1})C(q^{-1}), \quad \Phi_0 = \Phi_1 = 0, \quad (9b)$$

$$\Psi(q^{-1}) = L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})P(q^{-1})\text{adj } M(q^{-1})N(q^{-1}), \quad \Psi_0 = I_m. \quad (9c)$$

(8)式右边的两个滑动平均(MA)过程可用一个等价的唯一的 MA 过程表示为

$$D(q^{-1})\varepsilon(t) = \Phi(q^{-1})w(t) + \Psi(q^{-1})v(t). \quad (10)$$

其中 $D(q^{-1})$ 是稳定的, $D_0 = I_m$, 设 $n_p \leq n_\varepsilon$, 则 $n_d = n_\varepsilon$. 白噪声 $\varepsilon(t)$ 是零均值, 方差阵为 Q_ε 的新息过程^[3]. 由(8)和(10)式有 ARMA 新息模型

$$\Lambda(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t). \quad (11)$$

2.2 稳态最优去卷估值器

(2)和(3)式有状态空间模型

$$\beta(t+1) = P\beta(t) + Bs(t); \quad y(t) = H_1\beta(t) + r(t). \quad (12)$$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} -P_1 & & \\ \vdots & I_{(n_p-1)m} & \\ -P_{n_p} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{n_p} \end{bmatrix}, \quad H_1 = [I_m \ 0 \cdots 0]. \quad (13)$$

其中 $B_i = 0, i > n_p$. (1)式有状态空间模型

$$\eta(t+1) = A\eta(t) + Cw(t); \quad s(t) = H_2\eta(t). \quad (14)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} -A_1 & & \\ \vdots & I_{(n_a-1)m} & \\ -A_{n_a} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{n_a} \end{bmatrix}, \quad H_2 = [I_m \ 0 \cdots 0]. \quad (15)$$

式中 $C_i = 0, i > n_a$. (4)式有状态空间模型

$$a(t+1) = Ma(t) + Nv(t); \quad r(t) = H_3a(t) + v(t). \quad (16)$$

$$\text{其中 } M = \begin{bmatrix} -M_1 & & \\ \vdots & I_{(n_m-1)m} & \\ -M_{n_m} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 - M_1 \\ \vdots \\ N_{n_m} - M_{n_m} \end{bmatrix}, \quad H_3 = [I_m \ 0 \cdots 0]. \quad (17)$$

式中 $N_i = 0, i > n_m$, 引入增广状态 $x(t) = (\beta^T(t), \eta^T(t), a^T(t))^T$, T 为转置号, 有增广系统

$$x(t+1) = Fx(t) + Ge(t); \quad y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (18)$$

其中 F 是 $n_f \times n_f$ 阵, $n_f = m(n_p + n_a + n_m)$, $H = [H_1 \ 0 \ H_3]$,

$$\begin{bmatrix} P & BH_2 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad e(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

假设增广系统(18)式是完全可观的, 注意(18)式可看成是由子系统(12)与(14)式

串联之后再与子系统(16)式并联所构成的串、并联系统. 由线性系统理论知^[6], (18)式完全可观的必要条件是每个子系统是完可观的. 这等价于假设 $(P(q^{-1}), B(q^{-1}), (A(q^{-1}), C(q^{-1})), (M(q^{-1}), N(q^{-1})))$ 每对左素, 设增广系统的可观测性指数为 λ ^[7], 它是使下式成立的最小自然数($\lambda \leq n_f$):

$$\text{rank } \Omega = n_f; \quad \Omega = [H^T, \dots, (HF^{\lambda-1})^T]^T. \quad (20)$$

由文[8], 基于观测 $(y(0), \dots, y(t+k))$ 的最优状态平滑器 $\hat{x}(t/t+k)$ 为

$$\hat{x}(t/t+k) = \Omega^\# \begin{bmatrix} y(t) - \hat{v}(t/t+k) \\ \hat{y}(t+1/t+k) - H\hat{I}\hat{e}(t/t+k) - \hat{v}(t+1/t+k) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+\lambda-1/t+k) - \sum_{i=0}^{\lambda-2} HF^{\lambda-2-i}I\hat{e}(t+i/t+k) \\ - \hat{v}(t+\lambda-1/t+k) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

于是由(14)式有最优去卷平滑器 $\hat{s}(t/t+k)$ 为

$$\hat{s}(t/t+k) = H_2\hat{\eta}(t/t+k), \quad k > 0. \quad (22)$$

其中 $\hat{x}(j/i) = (\hat{\beta}^T(j/i), \hat{\eta}^T(j/i), \hat{a}^T(j/i))^T$, $\hat{e}(j/i) = (\hat{w}^T(j/i), \hat{v}^T(j/i))^T$, 且 $\hat{y}(j/i), \hat{e}(j/i), \hat{w}(j/i), \hat{v}(j/i)$ 分别是基于观测 $(y(0), \dots, y(i))$ 关于 $y(j), e(j), w(j)$ 和 $v(j)$ 的最优估值器. 由文[8]有 $\hat{y}(j/i) = y(j), j \leq i; \hat{w}(j/i) = 0, j \geq i; \hat{v}(j/i) = 0, j > i; \hat{e}(j/i) = 0, j > i$. 最优去卷滤波器和预报器分别为

$$\hat{s}(t/t) = H_2\hat{\eta}(t/t), \quad \hat{x}(t/t) = \Omega^\# \begin{bmatrix} y(t) - \hat{v}(t/t) \\ \hat{y}(t+1/t) - H\hat{I}\hat{e}(t/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+\lambda-1/t) - HF^{\lambda-2}I\hat{e}(t/t) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\hat{s}(t+k/t) = H_2\hat{\eta}(t+k/t), \quad \hat{x}(t+k/t) = \Omega^\# \begin{bmatrix} \hat{y}(t+k/t) \\ \hat{y}(t+k+1/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+k+\lambda-1/t) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

式中 $\Omega^\#$ 是 Ω 的伪逆, 由(20)式知 Ω 列满秩, 因而^[7]

$$\Omega^\# = (\Omega^T\Omega)^{-1}\Omega^T. \quad (25)$$

2.3 稳态最优输出预报器和白噪声估值器

为实现最优去卷估值器 $\hat{s}(j/i)$, 要求计算输出预报器和白噪声估值器. 由文[8], $\hat{y}(t+i/t)$ 可递推计算为

$$\Lambda(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+i/t) = D_i(q^{-1})\varepsilon(t+i). \quad (26)$$

其中 $D_i(q^{-1}) = D_iq^{-i} + \dots + D_{n_d}q^{-n_d}; D_i(q^{-1}) = 0, i > n_d; \Lambda(\tilde{q}^{-1})$ 为只对时标 $(t+i)$ 运算的 $\Lambda(q^{-1})$. $\varepsilon(t)$ 可由(11)式递推计算^[8]. 稳态最优白噪声平滑器为^[8]

$$\hat{w}(t/t+k) = \sum_{i=0}^k Q_w F_i^T Q_\varepsilon^{-1}(t+i); \quad \hat{v}(t/t+k) = \sum_{i=0}^k Q_v G_i^T Q_\varepsilon^{-1}(t+i). \quad (27)$$

2期

其中系数阵 F_i 和 G_i 可递推计算为

$$F_i = - \sum_{j=1}^{\min(i, n_d)} D_j F_{i-j} + \Phi_i; \quad G_i = - \sum_{j=1}^{\min(i, n_d)} D_j G_{i-j} + \Psi_i. \quad (28)$$

式中 $F_0 = 0, G_0 = I_m$, 规定 $\Phi_i = 0, i > n_p, \Psi_i = 0, i > n_p$. 特别有最优白噪声滤波器为

$$\hat{w}(t/t) = 0, \quad \hat{v}(t/t) = Q_w Q_e^{-1} e(t).$$

3 自校正去卷估值器

由(21), (22)式看到, 求去卷平滑器要求已知矩阵 F , 这要求已知 $C(q^{-1})$. 为避免辨识 $C(q^{-1})$ 的困难, 这里假设已知 $C(q^{-1}) = I_m q^{-1}$, 即(1)式为AR输入信号 $s(t)$, 其中设 $A(q^{-1})$ 和 Q_w 是未知的. (11)式可化为

$$A^*(q^{-1})y^*(t) = D(q^{-1})e(t). \quad (29)$$

其中 $A^*(q^{-1}) = L_0^{-1}A(q^{-1})L_0, y^*(t) = L_0^{-1}L(q^{-1})\det M(q^{-1})P(q^{-1})y(t)$, 于是系数阵有关系 $A_i = L_0 A_i^* L_0^{-1}$. 用ARMA新息模型(29)式参数的递推估值器^[9] 伴随最优去卷估值器(21)~(24)式, 将引出自校正去卷估值器^[3,8].

4 仿真例子

考虑二维($m=2$)系统(1)~(4)式, 其中 $n_a = n_c = 1, n_p = n_b = 1, n_m = n_n = 1, Q_w = \text{diag}(0.64, 0.64), Q_v = \text{diag}(1, 1), B_1 = C_1 = I_2$, 且 $A(q^{-1}), P(q^{-1})$ 和 $M(q^{-1})$ 是不稳定的.

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \\ M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (30)$$

设 A_i 和 Q_w 是未知的. (21), (22)式引出最优去卷平滑器 $\hat{s}(t/t+1)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{s}(t/t+1) = & y(t+1) + P_1 y(t) - \hat{v}(t+1/t+1) \\ & - N_1 \hat{v}(t/t+1). \end{aligned} \quad (31)$$

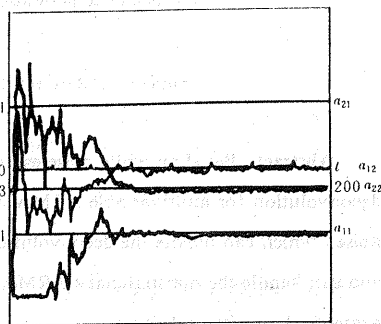


图1 递推增广最小二乘法估值 $\hat{A}_1(t)$ 的收敛性

仿真结果如图1至图3所示, 其中 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 表示 $s(t)$ 的分量. 表明自校正去卷平滑器 $\hat{s}(t/t+1)$ 对 $s(t)$ 具有良好的跟踪性能.

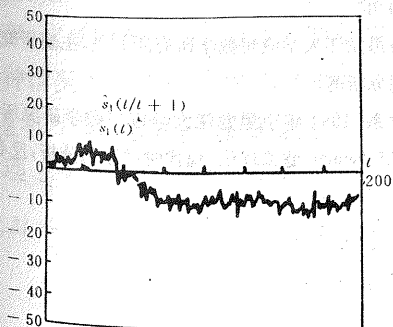


图2 $s_1(t)$ 和自校正去卷平滑器 $\hat{s}_1(t/t+1)$

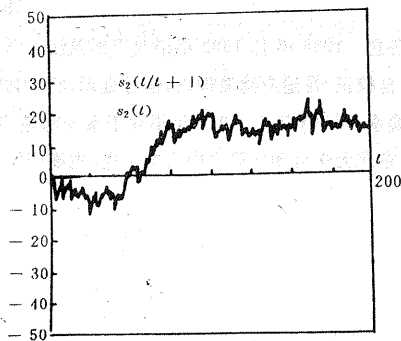


图3 $s_2(t)$ 和自校正去卷平滑器 $\hat{s}_2(t/t+1)$

参 考 文 献

- [1] Ahlen, A. and Sternad, S. . Wiener Filter Design Using Polynomial Equations. IEEE Trans. Signal Processing, 1991, 39 (11): 2387—2399
- [2] 邓自立, 张焕水. 多变量自校正去卷滤波器. 控制与决策, 1993, 8(2): 101—106
- [3] 邓自立, 张焕水. 多通道非平稳 ARMA 信号自校正去卷滤波器. 控制理论与应用, 1993, 10(5): 572—576
- [4] 邓自立, 张焕水. 多变量自校正递推去卷滤波器. 控制与决策, 1994, (9)3: 205—210
- [5] 张焕水, 邓自立. 带有色观测器噪声的多变量自校正去卷滤波器. 信息与控制, 1994, 23(2): 94—100
- [6] 陈福祥, 朱家方. 线性系统控制理论. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1990
- [7] 韩京清等. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985
- [8] 邓自立, 张焕水. 自校正 Kalman 滤波、预报、去卷、平滑新方法. 控制理论与应用, 1994, 11(2): 137—145
- [9] Ljung, L. . System Identification: Theory for the User, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987

Multichannel Optimal and Self-Tuning Deconvolution Estimators

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

ZHANG Huanshui

(Automation Research Centre, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: Based on white noise estimation theory, this paper presents a new method of optimal and self-tuning deconvolution for multivariable ARMA input signal observed through a linear system with the coloured observation noise, which can handle the deconvolution filtering, prediction and smoothing problems in the unified framework, and can handle the nonstationary ARMA input signals, unstable and/or nonminimum phase systems. A simulation example shows its usefulness.

Key words: deconvolution; input estimation; multivariable ARMA input signals; coloured observation noise; optimal and self-tuning deconvolution estimators

本文作者简介

邓自立 1938年生. 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授. 主要研究方向为系统辨识, 自校正、自适应滤波理论, 信号处理, 状态估计, 时间序列分析等.

张焕水 1964年生. 1984年毕业于泰安师范专科学校数学系, 1991年于黑龙江大学应用数学研究所获硕士学位. 现为东北大学自动化研究中心博士生. 主要研究方向为自适应 Kalman 滤波理论, 现代时间序列分析, 反卷积, 信号处理.