

## 一类 SISO 系统的结构奇异值 $\mu$ 综合\*

丛 山 施颂椒 张钟俊

(上海交通大学自动化系·上海, 200030)

**摘要:** 具有两个标量不确定性的结构化不确定性 SISO 系统,  $\mu$  综合一般是通过闭环系统  $\mu$  值的上界函数  $\inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$  来完成的. 本文给出了这种情况下  $\mu$  值及其上界函数中的  $D$  阵元素的显式表达式, 从而使  $\mu$  分析尤其是  $\mu$  综合的计算量减少很多, 并给出了应用  $D$  阵元素的显式表达的  $\mu$  综合算法和一个算例.

**关键词:** 结构奇异值方法; SISO 系统; 结构化不确定性; 鲁棒性

### 1 引言

结构奇异值( $\mu$ )是一种频域鲁棒性指标, 基于结构奇异值的鲁棒控制方法称为结构奇异值方法, 或  $\mu$  方法. 其优点: 一是理论上不具保守性, 二是能够将稳定鲁棒性与性能鲁棒性统一处理. 目前, 对鲁棒性分析的研究已相当丰满, 但  $\mu$  综合研究的进展相当缓慢. 目前应用最广的  $\mu$  综合方法是  $D$ - $K$  交替寻优法<sup>[1]</sup>. 所谓  $D$ - $K$  交替, 是根据:  $\mu \leq \inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ , 其中  $D$  满足[2]的定义, 则

$$\sup_{\omega} \mu \leq \sup_{\omega} \inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) = \inf_{D \in D} \sup_{\omega} \bar{\sigma}(DMD^{-1}).$$

考虑  $M$  是控制器  $K$  的函数, 可得

$$\sup_{\omega} \mu \leq \inf_{K, D} \sup_{\omega} \bar{\sigma}(DMD^{-1}). \quad (1.1)$$

用式(1.1)求解对  $K, D$  的联合最优十分困难. 故对固定的  $D$  求解最优控制器  $K$ , 然后对固定的  $K$  求解最优的  $D$  阵, 交替进行, 直到收敛到一个次最优解. 即便是对一些比较简单的问题进行  $\mu$  综合设计也非易事.

另一种  $\mu$  综合方法是  $\mu$ - $K$  交替寻优算法<sup>[3]</sup>, 但它的收敛性尚不能证明.

显见, 如果能用显式表达  $\mu$  值和式(1.1)中的  $D$  阵元素,  $\mu$  综合的计算量将大大减少. 一般而言, 这是困难的. 但对具有两个标量不确定性的 SISO 系统, 这却是可能的. 本文导出了这种情况下  $\mu$  值和  $D$  阵元素的显式表达式, 从而得到了一个  $\mu$  综合算法.

### 2 $\mu$ 值和 $D$ 阵元素的显式表达式

**定理 2.1** ( $\mu$  值的显式表达式)

设  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in C$ ,  $|a| + |d| \neq 0$  且  $ad = bc$ , 则

$$\mu(M) = |a| + |d|. \quad (2.1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 1 月 21 日收到. 1994 年 8 月 12 日收到修改稿.

证 将  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  和  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$  代入方程

$$\det(I - M\Delta) = 0.$$

并考虑  $ad - bc = 0$ , 得

$$1 - a\delta_1 - d\delta_2 = 0.$$

显然, 当  $ad \neq 0$  时,

$$\hat{\delta}_1 = a^* / (|a| + |d|) |a|;$$

$$\hat{\delta}_2 = d^* / (|a| + |d|) |d|$$

是式(2.3)的一组根, 并且  $|\hat{\delta}_1| = |\hat{\delta}_2| = 1 / (|a| + |d|)$ .

由式(2.3)可得

$$\delta_2 = (1 - a\delta_1) / d;$$

$$\delta_1 = (1 - d\delta_2) / a.$$

由于  $\bar{\sigma}(\Delta) = \max(|\delta_1|, |\delta_2|)$ , 对任意  $\Delta$  必有  $|\delta_1| \geq |\delta_2|$  或  $|\delta_1| \leq |\delta_2|$ . 假设  $|\delta_1| \geq |\delta_2|$ , 则  $\bar{\sigma}(\Delta) = |\delta_1| \geq \left| \frac{1 - a\delta_1}{d} \right| \geq \frac{1 - |a||\delta_1|}{|d|}$ , 即

$$\bar{\sigma}(\Delta) \geq \frac{1}{|a| + |d|}. \quad (2.7)$$

同理, 当  $|\delta_2| \geq |\delta_1|$  时, 也可导出上式. 由式(2.4)知式(2.7)的等号可以达到. 故足式(2.2)的  $\Delta$  的最小最大奇异值为  $\frac{1}{|a| + |d|}$ , 即式(2.1)成立.

当  $ad = 0$  时, 由式(2.3)可导出式(2.1)仍然成立. 证毕.

定理2.1的条件在常见的具有两个标量不确定性的SISO系统的分析与综合问题中能满足, 因此具有一般性意义.

**引理1** 设  $M = \begin{bmatrix} 1 & ac_2 \\ a^{-1}c_1 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ , 如果  $|c_1| \neq 0$ ,  $|c_2| \neq 0$  则当  $a = \sqrt{|c_1|/|c_2|}$  时,  $\bar{\sigma}(M)$  取极小值. (证明略)

**引理2** 设  $M(a)$  为  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  的映射,  $M(a) = \begin{bmatrix} a & ac_2 \\ a^{-1}c_1 & d \end{bmatrix}$ , 则关于射  $g(a) = \bar{\sigma}(M(a))$  有以下结论:

1) 如果  $c_1, c_2 \neq 0$ , 当  $a^* = \sqrt{|c_1||c_2|}$  时,  $\inf g(a) = g(a^*)$ ;

2) 如果  $|c_1| \rightarrow 0$ ,  $|c_2| < +\infty$ , 并且  $\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1}|c_1| = 0$ , 那么  $\inf g(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{\sigma}(M(a)) = \max(|a|, |d|)$ ;

3) 如果  $|c_2| \rightarrow 0$ ,  $|c_1| < +\infty$ , 并且  $\lim_{a \rightarrow 0} a|c_2| = 0$ , 那么  $\inf g(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{\sigma}(M(a)) = \max(|a|, |d|)$ ;

4) 如果  $|c_1| \rightarrow 0$ ,  $|c_2| \rightarrow 0$ , 那么  $\forall a^* \in \mathbb{R}^+$ ,  $\inf g(a) = g(a^*) = \max(|a|, |d|)$ . (证明略)

根据引理2的结论, 如果广义地把  $a$  定义在  $[0, +\infty]$  上并定义映射  $g_1$  为:

2 期

$$g_1(a) = \begin{cases} g(a), & a \in (0, +\infty), \\ \lim_{a \rightarrow 0} g(a), & a = 0, \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} g(a), & a = +\infty. \end{cases}$$

那么  $\forall c_1, c_2 \in C$ , 当  $a^* = \sqrt{|c_1|/|c_2|}$  时,  $\inf g_1(a) = g_1(a^*)$ .

**定理 2.2**  $D$  阵元素的显式表达式

设  $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{2 \times 2}$ ,  $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ ,  $d_1, d_2$  广义地定义在  $[0, +\infty]$  上, 并取映

射  $h(D)$  为

$$h(D) = \begin{cases} \bar{\sigma}(DMD^{-1}0), & d_1, d_2 \in (0, +\infty), \\ \lim_{d_j \rightarrow 0} \bar{\sigma}(DMD^{-1}), & \text{如果有 } d_i = 0 \text{ 或 } d_j = \infty, i, j \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

则当

$$D^* = \text{diag}(d_1^*, d_2^*), \quad d_1^* = \sqrt{|M_{21}|}, \quad d_2^* = \sqrt{|M_{12}|}$$

$$\inf h(D) = h(D^*).$$

时,

证 由引理 2 经简单的推导即可得.

由引理 1 至定理 2.2 的证明过程可见,  $d_1, d_2$  的相位条件不是必要的. 只在幅值为

$\sqrt{|M_{21}|}$  和  $\sqrt{|M_{12}|}$  即可, 在进行  $\mu$  综合设计时将用到这个性质.

### 3 $\mu$ 综合算法

图 1 所示系统,  $\mu$  综合的任务是求控制器  $K$ , 使系统  $P$  与  $K$  构成的闭环系统的  $\mu$  值最小.

当  $\Delta$  由两个标量不确定性构成,  $P$  为 SISO 系统时, 有如下  $\mu$  综合算法:

Step 1 求满足  $\inf_K \|M\|_\infty$  的  $H_\infty$  最优控制器  $K_1$ ;

并取  $\mu_0 = \|M\|_\infty$ ;

Step 2 把  $K_i$  代入  $M$  得  $M_i$ , 计算  $\mu_i = |M_{11}| + |M_{22}|$ , 比较  $|\mu_i - \mu_{i-1}|$  是否满足精度要求. 是则停止, 否则计算  $d_{1i} = \sqrt{|M_{21i}|}$ ,  $d_{2i} = \sqrt{|M_{12i}|}$ , 并用稳定、最小相位、可逆实有理传递函数  $\tilde{d}_{1i}, \tilde{d}_{2i}$  的幅值拟合  $d_{1i}, d_{2i}$ ;

Step 3 设  $D_i = \text{diag}(\tilde{d}_{1i}, \tilde{d}_{2i})$ , 求满足  $\inf_{K_{i+1}} \|D_i M_i D_i^{-1}\|_\infty$  的  $H_\infty$  最优控制器  $K_{i+1}$ . 返回

Step 2.

### 4 设计例子

考虑文献[3]中例 1 如图 2, 求解如下鲁棒性能问题:

$$\inf_K \sup_\omega \mu(M).$$

其中

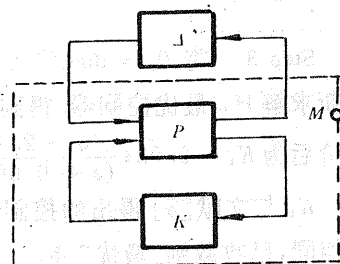


图 1 具有结构不确定性的闭环系统

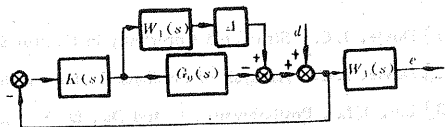


图 2 具有加性不确定性的性能鲁棒问题

$$M = \begin{bmatrix} -W_0 T_0 G_0^{-1} & -W_2 T_0 G_0^{-1} \\ W_1 S_0 & W_1 S_0 \end{bmatrix}, \quad G_0(s) = \frac{0.5(1-s)}{(s+2)(s+0.5)};$$

$$W_1(s) = 50 \frac{1 + \frac{s}{1.245}}{1 + \frac{s}{0.07}}; \quad W_2(s) = 0.1256 \frac{1 + \frac{s}{0.502}}{1 + \frac{s}{2}}.$$

用本文算法解上述问题:

Step 1 取  $D_0 = I$ , 解以下  $H_\infty$  优化问题

$$\inf_K \|DMD^{-1}\|_\infty, \quad (4.1)$$

得  $H_\infty$  最优控制器  $K_0 = 1.923 \frac{(s+2)(s+0.5)}{(s+0.007)(s+2.7230)}$ ;

Step 2 把  $K_0$  代回  $M$ , 求解  $d_{21}, d_{21}$ , 见图 3 中实线, 拟合  $\tilde{d}_{11}, \tilde{d}_{21}$ .

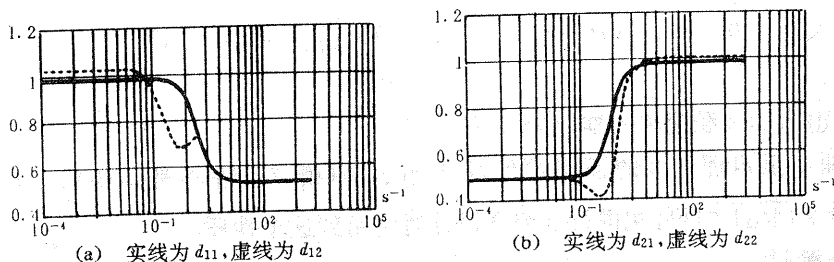


图 3  $d_1, d_2$  的对数频率特性曲线

Step 3 将  $D_1 = \text{diag}(\tilde{d}_{11}, \tilde{d}_{21})$  代入式 (4.1) 重新求解  $H_\infty$  最优控制器. 得到的控制器在平衡降阶后为  $K_1 = 2.034 \frac{(s+2.118)(s+0.5)}{(s+0.007)(s+3.307)}$ .

$K_1$  与文献[3]得出的控制器设计的最终结果相同, 已收敛到“最优”点.

图 4 给出了  $H_\infty$  最优控制器  $K_0$  和  $\mu$  最优控制器  $K_1$  分别代入  $M$  后得到的  $\mu(M)$  曲线. 图中实线和虚线分别对应于  $K_0$  和  $K_1$  组成闭环系统后的  $\mu$  曲线. 对比两者可以看出  $K_1$  在  $\mu$  最优化意义上明显优于  $K_0$ .

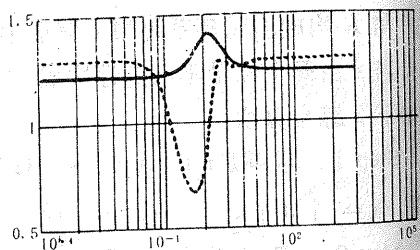


图 4 闭环系统的  $\mu$  曲线

## 参 考 文 献

- [1] Doyle, J. C.. Structured Uncertainty in Control System Design. in Proc. of 24th CDC, 1985, 260-265
- [2] Doyle, J. C.. Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties. IEEE Proc. Part D, 1982, 129:242-250
- [3] Lin, J. L., Postlethwaite, I. and Du, D. W..  $\mu$ -K Iteration: A New Algorithm for  $\mu$ -Synthesis. Automatica, 1993, (1): 214-224

## $\mu$ -Synthesis for A Class of SISO Systems

CONG Shan, SHI Songjiao and ZHANG Zhongjun

(Department of Automation Shanghai Jiao Tong University • Shanghai, 200030, PRC)

**Abstract:** This paper addresses the  $\mu$ -synthesis problem for SISO systems with two scalar uncertainties. Generally, an upper bound for  $\mu$ , i. e.  $\inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ , is used to achieve the goal. In the specified situation of this paper, we derive the analytic solutions for both  $\mu$  and the optimal  $D$  in the upper bound. Hence, the computation for  $\mu$ -synthesis can be greatly eased. While the  $\mu$ -synthesis algorithm based on the analytic solution for optimal  $D$  is shown, an example is illustrated.

**Key words:**  $\mu$ -synthesis; SISO systems; structured uncertainties; robustness

### 本文作者简介

丛 山 1968 年生. 1991 年在西北工业大学获硕士学位, 1994 年于上海交通大学获博士学位. 近年来主要研究方向为鲁棒控制.

施颂椒 见本刊 1995 年第 1 期第 25 页.

张钟俊 1915 年生. 1934 年毕业于国立交通大学电气工程系, 1935 年及 1938 年获美国麻省理工学院电机系硕士和博士学位, 曾任中国自动化学会副理事长等职. 目前主要兴趣是: 工业大系统, 工业过程控制, 非线性控制及智能控制等.