第12卷第2期
1995年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 2
Apr., 1995

广义 2-D 离散系统 FMI 模型的响应公式及局部能达性

张兰玲　董木森　瞿寿德
(北京科技大学自动化信息工程学院·北京,100083)

摘要: 本文讨论了广义 2-D 离散系统 FMI 模型,给出了该模型的响应公式,并讨论了该模型的局部能达性.

关键词: 广义离散系统; 响应公式; 局部能达性

1 引　言

自 1975 年 Roesser 首次提出二维系统的 Roesser 模型以来,二维系统理论以其在数字信号处理,图象处理方面的广泛应用引起了人们极大的兴趣,并取得了丰富的成果. 近年来,随着对广义一维系统的深入研究,国外一些学者开始将广义系统的理论引入二维系统[1],对广义二维 FMI 模型有解的条件作了讨论[2,3],取得了一些富有开拓性的成果,本文在此基础上系统阐述该模型有解的充要条件,对其局部能达性进行了较为深入的分析和讨论,同时给出了该模型的响应公式.

2 广义 2-D FMI 模型

考虑如下方程描述的模型:

$$E_x(i+1,j+1) = A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) + Bu(i,j), \tag{1}$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + Du(i,j). \tag{2}$$

在上式中,
$$x(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}.$$

其中,i,j 分别为整值垂直坐标和整值水平坐标,$x(i,j) \in R^n$ 是(i,j)处的局部状态变量,$x^h \in R^{n_1}$ 是 n_1 维水平状态向量,$x^v \in R^{n_2}$ 是 n_2 维垂直状态向量,$u(i,j) \in R^m$ 为输入向量,$y(i,j) \in R^l$ 为输出向量,A_0, A_1, A_2, B, C, D 是具有相应维数的实矩阵.

(1) 式的边界条件由下式给定

$$x(i,0) = x_{i0}, \quad x(0,j) = x_{0j}, \quad (i,j = 0,1,2,\cdots). \tag{3}$$

方程(1)中,若 E 为非方阵或 $\det E = 0$,我们称(1),(2)描述的模型为广义 2-D FMI 模型.

3 解的存在性和唯一性

令 $F(z_1,z_2)$ 为 $f(i,j)$ 的二维 z 变换,$f(i,j)$ 满足条件 $f(i,j) = 0, (i<0$, 或 $j<0)$.

本文于 1994 年 3 月 1 日收到. 1994 年 9 月 13 日收到修改稿.

$$F(z_1,z_2)=Z[f(i,j)]\triangleq\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}f(i,j)z_1^{-i}z_2^{-j}.$$

引理 1[4] 若 $F(z_1,z_2)=Z[f(i,j)]$,则

$$Z[f(i+1,j)]=z_1[F(z_1,z_2)-F(0,z_2)],$$
$$Z[f(i,j+1)]=z_2[F(z_1,z_2)-F(z_1,0)],$$
$$Z[f(i+1,j+1)]=z_1z_2[F(z_1,z_2)-F(z_1,0)-F(0,z_2)+f(0,0)].$$

其中 $$F(z_1,0)=\sum_{i=0}^{\infty}f(i,0)z_1^{-i},\quad F(0,z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}f(0,j)z_2^{-j}.$$

将 FMI 模型进行二维 z 变换,得

$$\begin{aligned}(z_1z_2E-z_1A_1-z_2A_2-A_0)X(z_1,z_2)&=BU(z_1,z_2)+z_2(z_1E-A_2)X(z_1,0)\\&\quad+z_1(z_2E-A_1)X(0,z_2)-z_1z_2Ex(0,0),\\Y(z_1,z_2)&=CX(z_1,z_2)+DU(z_1,z_2).\end{aligned}\tag{4}$$

定义 $$S_{FM}(z_1,z_2)=(z_1z_2E-z_1A_1-z_2A_2-A_0).\tag{5}$$

为简单起见,我们讨论零边界条件下,解的存在性和唯一性. 在零边界条件下,引入(5)式,(4) 式可写为

$$\begin{aligned}S_{FM}X(z_1,z_2)&=BU(z_1,z_2),\\Y(z_1,z_2)&=CX(z_1,z_2)+DU(z_1,z_2).\end{aligned}\tag{6}$$

称在零边界条件下,满足(6) 式的输入为允许的.

定理 1[5~6] 1) 对所有的允许输入 $u(i,j)$,当且仅当

$$\operatorname{rank}[S_{FM}(z_1,z_2)\ B]=\operatorname{rank}[S_{FM}(z_1,z_2)]\tag{7}$$

时,(6) 式有解.

2) 对所有的允许输入 $u(i,j)$,当且仅当

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}S_{FM}(z_1,z_2)\\C\end{bmatrix}=\operatorname{rank}[S_{FM}(z_1,z_2)]\tag{8}$$

时,(6) 式解,且相对于 $y(i,j)$ 唯一.

3) 对所有的允许输入 $u(i,j)$,当且仅当

$$\operatorname{rank}[S_{FM}(z_1,z_2)]=n$$

时,(6) 式有解,且相对于 $x(i,j)$ 唯一. 若 E 为方阵,则解的存在性和唯一性由下式保证

$$\Delta(z_1,z_2)\equiv|S_{FM}(z_1,z_2)|\not\equiv 0.\tag{9}$$

对 FMI 模型,(9) 式等价为 $$|z_1z_2E-z_1A_1-z_2A_2-A_0|\not\equiv 0.\tag{10}$$

令 $G=[z_1z_2-z_1A_1-z_2A_2-A_0]$,则在满足(10) 式的条件下,FMI 模型的解可写成如下形式

$$X(z_1,z_2)=G^{-1}BU(z_1,z_2).\tag{11}$$

将逆阵 G^{-1} 写成如下形式

$$G^{-1}=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}L_{pq}z_1^{-p}z_2^{-q},\quad(n_1\leqslant n,n_2\leqslant n).\tag{12}$$

L_{pq} 为实矩阵,满足下列条件

$$\begin{cases} A_0L_{00}+A_1L_{10}+A_2L_{01}=I, & (p=q=1) \\ EL_{pq}=A_0L_{p-1,q-1}+A_1L_{p,q-1}+A_2L_{p-1,q}, & (p\neq 1 \text{ 或 } q\neq 1). \\ 0, \quad (p<-n_1 \text{ 或 } q<-n_2). \end{cases} \tag{13}$$

I 为单位阵.

由(12)式得

$$\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}L_{pq}z_1^{-q}z_2^{-p}G=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}GL_{pq}z_1^{-p}z_2^{-q}=I. \tag{14}$$

将(12)式代入(11)式得

$$X(z_1,z_2)=\sum_{p=-n_1}^{\infty}\sum_{q=-n_2}^{\infty}L_{pq}z_1^{-p}z_2^{-q}BU(z_1,z_2). \tag{15}$$

将式(15)进行二维 z 反变换

$$x(i,j)=\sum_{p=0}^{i+n_1}\sum_{q=0}^{j+n_2}L_{i-p,j-q}BU(p,q). \tag{16}$$

4 局部能达性

定义[7] 在零边界条件下,FMI 称为在矩形域[(0,0),(h,k)]中局部能达的,如果对于任何矢量 $s\in R^n$, $(n=n_1+n_2)$,都存在输入序列 $u(i,j)$, $(0,0)\leqslant(i,j)\leqslant(h+n_1+1,k+n_2+1)$,使得 $x(h,k)=s$.

定理 2 零边界条件下,FMI 局部能达的充要条件为

$$\text{rank } R=n, \quad R=[M_0,M_1^1,\cdots,M_h^1,M_1^2,\cdots,M_k^2,M_{11},\cdots,M_{hk}''], \tag{17}$$

$$M_p^1=L_{h-p,k}B, \quad M_q^2=L_{h,k-q}B, \quad M_{pq}=L_{h-p,k-q}B, \quad M_0=L_{h,k}B,$$

$$p=1,\cdots,h', \quad h'=h+n_1+1, \quad q=1,\cdots,k', \quad k'=k+n_2+1.$$

证 将(16)式代入 $x(h,k)=s$ 中,得

$$s=\sum_{p=0}^{h+n_1}\sum_{q=0}^{k+n_2}L_{h-p,k-q}BU(p,q). \tag{18}$$

令 $u_{00}=u(0,0)$, $u_{1h}=\begin{bmatrix}u(1,0)\\u(2,0)\\\vdots\\u(h',0)\end{bmatrix}$, $u_{2k}=\begin{bmatrix}u(0,1)\\u(0,2)\\\vdots\\u(0,k')\end{bmatrix}$, $u_{hk}=\begin{bmatrix}u(1,1)\\\vdots\\u(1,k')\\u(2,1)\\\vdots\\u(h',k'-1)\end{bmatrix}$.

则(18)式可写成

$$s=R\begin{bmatrix}u_{00}\\u_{1h}\\u_{2k}\\u_{hk}\end{bmatrix}. \tag{19}$$

由(19)式可知,FMI 局部能达当且仅当(17)式满足. 证毕.

5 结束语

本文就广义 2-D FMI 模型,给出了响应公式,并对其有解的存在性和唯一性进行了讨论,同时,对其局部能达性也做了一些探讨,这些概念也可以推广到广义二维系统的其它

模型.

参 考 文 献

[1] Lewis, F. L. and Mertzios, B. G.. On the Analysis of Two-dimensional Discrete Singular Systems. Circuits, Systems, and Signal Proc, 1991,7

[2] Kaczorek, T.. Singular General Model of 2-D System and Its Solutions. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, 33:1060—1091

[3] Fornasini, E. and Marchesini, G.. Structure and Properties of Two-Dimensional Systems Multidimensional Systems, Techniques and Applicat, 1988, 29

[4] 杨成梧.二维线性多变量系统.华东工学院学报，1987

[5] Kurek, JERZY E.. The General State-Space Model for a Two-Dimensional Linear Digital Systems. IEEE Trans. Automat. Contr, 1985, AC-30: 600—602

[6] Lewis, F. L.. A Review of 2-D Implicit Systems. IFAC Trans. Automic., 1992, 28:345—354

[7] Kurek, J. E.. Observability and Reconstructability of 2-D Liner Digital System. IEEE Trans. Automat Control., 1987, AC-32:170—171

General Response Formula and Local Reachability for the Singular FMI Model of 2-D Systems

ZHANG Lanling, DONG Musen and QU Shoude

(Automation Information and Engeering College, Beijing University of Science and Technology • Beijing, 100083, PRC)

Abstract: In this paper, we introduce the FMI singular model of 2-D linear systems, Give the response fomular. At the same time, the local reachability problem is solved.

Key words: singular discrete system; response formula; local reachability

本文作者简介

张兰玲 女，1971 年生. 1992 年毕业于太原工业大学，并考入北京科技大学自动化信息工程学院，攻读自动控制理论及应用专业硕士学位. 1994 年提前攻读工业自动化专业博士学位. 目前研究领域有神经网络，小波分析及图像处理.

董木森 1937 年生. 1963 年毕业于中国科技大学，现为北京科技大学自动化信息工程学院副教授. 主要从事系统理论方面的研究.

瞿寿德 1932 年生. 1953 年毕业于武汉大学，1956 年至 1960 年在苏联科学院自动学与运动学研究所(即今控制科学研究所)进修，获技术科学候补博士学位. 现任北京科技大学自动化系教授. 近期研究方法是过程控制中的分布参数系统、模式识别及图像序列分析.