第12卷第2期
1995年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 2
Apr., 1995

最优模糊蕴涵 R_s 及其应用的研究*

杨纶标
（华南理工大学应用数学系·广州，510641）

郑启伦
（华南理工大学计算机科学系·广州，510641）

凌卫新
（华南理工大学应用数学系·广州，510641）

摘要：我们在文[1]的基础上，讨论了最优模糊蕴涵的有关性质，并用模糊 α-真和最优模糊蕴涵证明了模糊推理规则以及给出用最优模糊蕴涵实现的推理模型.

关键词：模糊 α-真；最优蕴涵；模糊推理

1 前　　言

"如果…，则…"的模糊控制，是模糊推理的最简形式. 本文在最优模糊蕴涵的条件下，将这个简单的推理模型，推广为复杂的推理模型. 换句话说，由简单的模型控制得到复杂的模糊控制. 因此，本文的工作不仅对控制理论有重要的理论意义，而且也有广阔应用前景[2].

下面介绍，我们把最优模糊蕴涵 R_s，应用于"用MOS-DYL集成电路实现模糊逻辑功能的研究"时，得到的推理方法.

2 最优模糊蕴涵 R_s 的性质

定义 1[3]

$$R_s:\ (A \to B)(x) = \begin{cases} 1, & A(x) \leqslant B(x), \\ 0, & A(x) > B(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

它与二值逻辑中的蕴涵，真值相同，并有如下性质. 为了方便，先回顾几个概念.

若 A 和 $A \to B$ 的真值均大于或等于 $\alpha(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则均称为模糊 α-真[1]，否则称为模糊 α-假.

若 A 和 $A \to B$ 的真值恒等于1，则为模糊恒真. A, B 均表示模糊命题.

性质 1　若 $A \subseteq B$，则 $A \to B$ 为模糊恒真.

性质 2　若 $A \to B$ 为模糊恒真，则 $(B \to C) \to (A \to C)$ 和 $(C \to A) \to (C \to B)$ 均为模糊恒真.

上述两性质，根据 R_s 和模糊恒真不难推得.

性质 3

$$A \to B = B^c \to A^c.$$

证　根据 R_s，$\forall\, x \in X$，有

$$\begin{aligned}(A \to B)(x) &= \begin{cases} 1, & A(x) \leqslant B(x) \\ 0, & A(x) > B(x) \end{cases} = \begin{cases} 1, & 1 - B(x) \leqslant 1 - A(x) \\ 0, & 1 - B(x) > 1 - A(x) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & B^c(x) \leqslant A^c(x) \\ 0, & B^c(x) > A^c(x) \end{cases} = (B^c - A^c)(x),\end{aligned}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1994年9月16日收到. 1995年1月9日收到修改稿.

所以
$$A \to B = B^C \to A^C.$$

性质 4　若 $A_1 \to B_1, A_2 \to B_2$ 对 x 均为模糊 α- 真，则

1）$(A_1 \cup A_2) \to (B_1 \cup B_2)$；2）$(A_1 \cap A_2) \to (B_1 \cap B_2)$ 也都对 x 为模糊 α- 真.

证　由已知得 $(A_1 \to B_1)(x) \geqslant \alpha$，$(A_2 \to B_2)(x) \geqslant \alpha$. 因 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$，故 $(A_1 \to B_1)(x) \neq 0$，$(A_2 \to B_2)(x) \neq 0$，根据 R_s 推得 $A_1(x) \not> B_1(x)$，$A_2(x) \not> B_2(x)$，从而 $A_1(x) \leqslant B_1(x)$，$A_2(x) \leqslant B_2(x)$. 故 $A_1(x) \vee A_2(x) \leqslant B_1(x) \vee B_2(x)$. 所以 $(A_1 \cup A_2)(x) \leqslant (B_1 \cup B_2)(x)$. 因此 $(A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2)(x) = 1 \geqslant \alpha$. 即知 $(A_1 \cup A_2) \to (B_1 \cup B_2)$ 对 x 为模糊 α- 真，故 1）得证.

类似证 2).

这个性质可推广到有限个的情形.

性质 5　$A \to B$ 对 x 为模糊 α- 真 $\Leftrightarrow C$ 和 $A \cap C \to B \cap C$ 对 x 均为模糊 α- 真.

证　必要性. 若 $A \subseteq B$，则显然成立.

设 $A \not\subseteq B$ 且 $(A \to B)(x) \geqslant x$，由 R_s 推得 $A(x) \not> B(x)$，故 $A(x) \leqslant B(x)$. 那么必有 $C(x) \geqslant \alpha$，使 $A(x) \wedge C(x) \leqslant B(x) \wedge C(x)$，即 $(A \cap C)(x) \leqslant (B \cap C)(x)$，从而 $(A \cap C) \to (B \cap C)(x) = 1 \geqslant \alpha$，所以 $A \cap C \to B \cap C$ 对 x 为模糊 α- 真.

充分性. 设 C 和 $A \cap C \to B \cap C$ 对 x 均为模糊 α- 真，即 $C(x) \geqslant \alpha$ 和 $(A \cap C \to B \cap C)(x) \geqslant \alpha$，从而推得 $(A \cap C)(x) \not> (B \cap C)(x)$，故 $(A \cap C)(x) \leqslant (B \cap C)(x)$，得
$$A(x) \wedge C(x) \leqslant B(x) \wedge C(x). \tag{2.2}$$
此式对任意的 $\alpha(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 均成立，从而 $A(x) \leqslant B(x)$，否则，若 $A(x) > B(x)$，则取 $C(x) > B(x)$ 和 $C(x) = A(x)$，便推得 $A(x) \wedge C(x) > B(x) \wedge C(x)$，这与(2.2)式矛盾. 那么由 $A(x) \leqslant B(x)$，推得 $(A \to B)(x) = 1 > \alpha$，所以 $A \to B$ 对 x 为模糊 α- 真.

性质 6　若 $A \to B$ 对 x 为模糊 α- 真，则 $\forall \lambda \in [0,1]$，$A^\lambda \to B^\lambda$[4] 也对 x 为模糊 α- 真.

证　由假设知 $(A \to B)(x) \geqslant \alpha$，从而推得 $A(x) \not> B(x)$，即 $A(x) \leqslant B(x)$，那么 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\left(\frac{B(x)}{A(x)}\right)^\lambda \geqslant 1$，故 $(A(x))^\lambda \leqslant (B(x))^\lambda$，从而 $(A^\lambda \to B^\lambda)(x) = 1$，即 $(A^\lambda \to B^\lambda)(x) \geqslant \alpha$. 所以 $A^\lambda \to B^\lambda$ 对 x 模糊 α- 真.

定理 1　若对 $\forall x \in X$，$A_1 \to B$ 和 $A_2 \to B$ 均对 x 为模糊 α- 真，则

1）$(A_1 \cup A_2) \to B$ 对 x 为模糊 α- 真，且 $A_1 \cup A_2 \to B = (A_1 \to B) \cap (A_2 \to B)$.

2）$(A_1 \cap A_2) \to B$ 对 x 为模糊 α- 真，且 $A_1 \cap A_2 \to B = (A_1 \to B) \cup (A_2 \to B)$.

证　仅证 1)，类似证 2). $\forall x \in X$，有

$[(A_1 \cup A_2) \to B](x) = 1 \Leftrightarrow (A_1(x) \vee A_2(x)) \leqslant B(x) \Leftrightarrow A_1(x) \leqslant B(x)$ 且 $A_2(x) \leqslant B(x) \Leftrightarrow (A_1 \to B)(x) = 1$ 且 $(A_2 \to B)(x) = 1 \Leftrightarrow (A_1 \to B)(x) \wedge (A_2 \to B)(x) = 1 \Leftrightarrow [(A_1 \to B) \cap (A_2 \to B)](x) = 1$ 等于 0 时，类似证之. 因此
$$(A_1 \cup A_2) \to B = (A_1 - B) \cap (A_2 \to B). \tag{2.3}$$
而由假设和 $(A_1 \to B)(x) \geqslant \alpha$，$(A_2 \to B)(x) \geqslant \alpha$，那么由(2.3)式不难推得 $(A_1 \cup A_2 \to B)(x) \geqslant \alpha$，所以 $(A_1 \cup A_2) \to B$ 对 x 为模糊 α- 真.

定理 2　若 $\forall x \in X$，$A \to B_1, A \to B_2$ 均对 x 为模糊 α- 真，则

1) $A \to (B_1 \cup B_2)$ 对 x 为模糊 α- 真，且

$$A \to (B_1 \cup B_2) = (A \to B_1) \cup (A \to B_2).$$

2) $A \to (B_1 \cap B_2)$ 对 x 为模糊 α- 真，且

$$A \to (B_1 \cap B_2) = (A \to B_1) \cap (A \to B_2).$$

证　1) 因为

$(A \to B_1 \cup B_2)(x) = 1 \Leftrightarrow A(x) \leqslant (B_1 \cup B_2)(x). \Leftrightarrow A(x) \leqslant B_1(x)$ 或 $A(x) \leqslant B_2(x) \Leftrightarrow (A \to B_1)(x) = 1$ 或 $(A \to B_2)(x) = 1 \Leftrightarrow (A \to B_1)(x) \vee (A - B_2)(x) = 1 \Leftrightarrow [(A \to B_1) \cup (A \to B_2)](x) = 1$，所以 $A \to B_1 \cup B_2 = (A \to B_1) \cup (A \to B_2)$. 而由此式不难推得 $A \to B_1 \cup B_2$ 对 x 为模糊 α- 真.

上述两定理，原是普通集的两个结论，这里根据最优模糊蕴涵把它推广到模糊集的情况，甚至还可推广到多个模糊集的情形.

3　最优模糊蕴涵的模糊推理

下面考虑在模糊 α- 真条件下的模糊推理：

定理 3　若 $A \to B$ 与 A 对 x 均为模糊 α- 真，则 B 对 x 也为模糊 α- 真.

证　若 $A \to B$ 对 x 为模糊 α- 真，则 $(A \to B)(x) \geqslant \alpha$，根据最优模糊蕴涵的定义，可以推得

$$A(x) \leqslant B(x). \tag{3.1}$$

又已知 A 对 x 为模糊 α- 真，故 $A(x) \geqslant \alpha$. 那么由(3.1)式得知 $B(x) \geqslant \alpha$，所以 B 对 x 为模糊 α- 真.

定理 4　若 $A \to B$ 对 x 为模糊 α- 真，B 对 x 为模糊 α- 假，则 A 对 x 为模糊 α- 假.

事实上，根据定义 1，只须证明 $A(x) \leqslant \alpha, (0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2})$ 便可. 由已知条件容易得 $A(x) \leqslant B(x)$ 和 $B(x) \leqslant \alpha$，结合这两式，便可得结果.

定理 5　若 $A \to B$ 和 $B \to C$ 均对 x 为模糊 α- 真，则 $A \to C$ 也对 x 模糊 α- 真.

上述推理规则，是指前后件对象相同时的结果. 若前后件的对象不同时，也有类似上述定理的结论. 为此，将最优模糊蕴涵 R_s 改写为

$$R_s:\ (A \to B)(x,y) = \begin{cases} 1, & A(x) \leqslant B(y), \\ 0, & A(x) > B(y). \end{cases}$$

其中

$$A \in \mathscr{F}(X),\quad B \in \mathscr{F}(Y),\quad x \in X,\quad y \in Y.$$

这时 $A \to B$ 表示两个论域上的二元关系，关系程度 $(A \to B)(x,y)$ 就是模糊推理的真值.

定义 2　设 $A \in \mathscr{F}(X), B \in \mathscr{F}(Y),\ x \in X, y \in Y$.

1) 若 $(A \to B)(x,y) \geqslant \alpha(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称 $A \to B$ 对 (x,y) 为模糊 α- 真.

2) 若 $(A \to B)(x,y) \leqslant \alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2})$，则称 $A \to B$ 对 (x,y) 为模糊 α- 假.

定理 6　若 $A \to B$ 对 (x,y) 与 A 对 x 均为模糊 α- 真，则 B 对 y 也为模糊 α- 真.

定理 7　若 $A \to B$ 对 (x,y) 为模糊 α- 真. B 对 y 为模糊 α- 假，则 A 对 x 也为模糊 α- 假.

定理 8　若 $A \to B$ 对 (x,y) 与 $B \to C$ 对 (y,z) 均为模糊 α- 真，则 $A \to C$ 对 (x,z) 也为

模糊 α- 真.

为了节省篇幅略去这几个定理的证明.

4 用最优模糊蕴涵实现的模糊推理模型

在实际问题中的模糊推理一般都比较复杂,不过我们可以根据前面的结论,将它转化为简单的最优模糊蕴涵来处理,即把复杂的模型转化为简单的模型.对电路来说,复杂的推理电路,可用简单的推理电路组合而成.

1° 如果 x 是 A 则 y 是 B.

这是最简的推理模型,记 $A \to B$.这也是不同论域上的推理,这样的推理反映了不同论域上的变元之间的关系,所以也记 $A \to B \triangleq R$.于是

$$R(x,y) = \begin{cases} 1, & A(x) \leqslant B(y), \\ 0, & A(x) > B(y). \end{cases}$$

2° 如果 x 是 A 则 y 是 B,否则 C.

这个推理对 $A \to B$ 和 $A^c \to C$ 都要在某个程度上成立,所以推理模型可表示为

$$R = (A \to B) \cap (A^c \to C).$$

根据最优模糊蕴涵 R_s 的算法,有

$$\begin{aligned} R(x,y) &= (A \to B)(x,y) \wedge (A^c \to C)(x,y) \\ &= \begin{cases} 1, & A(x) \leqslant B(y) \text{ 且 } A^c(x) \leqslant C(y), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

3° 如果 x_1 是 A_1 则 y_1 是 B_1,否则;

如果 x_2 是 A_2 则 y_2 是 B_2,否则;

…

如果 x_n 是 A_n 则 y_n 是 B_n.

按照 2° 的想法.这个推理模型可表示为

$$R = (A_1 \to B_1) \cap (A_2 \to B_2) \cap \cdots \cap (A_n \to B_n).$$

于是按扎德的投影原理[5],可推得

$$R(x,y) = \begin{cases} 1, & A_1(x_1) \leqslant B_1(y_1) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } A_n(x_n) \leqslant B_n(y_n), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$

4° 如果 x_1 是 A_1 且 x_1 是 B_1 则 y_1 是 C_1,否则;

如果 x_2 是 A_2 且 x_2 是 B_2 则 y_1 是 C_2,否则;

…

如果 x_n 是 A_n 且 x_n 是 B_n 则 y_n 是 C_n.

按照前面的做法,这个推理模型可表示为

$$R = [(A_1 \cap B_1) \to C_1] \cap [(A_2 \cap B_2 \to C_2] \cap \cdots \cap [(A_n \cap B_n) \to C_n].$$

根据定理 1,有

$$R = [(A_1 \to C_1) \cup (B_1 \to C_1)] \cap \cdots \cap [(A_n \to C_n) \cup (B_n \to C_n)].$$

设
$$[(A_{i_0}\to C_{i_0})\cup(B_{i_0}\to C_{i_0})](x_{i_0},y_{i_0})=\bigwedge_{j=1}^{n}[(A_j\to C_j)\cup(B_j\to C_j)](x_j,y_j),$$
于是由投影原理,得
$$\begin{aligned}R(x,y)&=[(A_1\to C_1)\cup(B_1\to C_1)](x_1,y_1)\wedge\cdots\wedge[(A_n\to C_n)\cup(B_n\to C_n)](x_n,y_n)\\&=[(A_{i_0}\to C_{i_0})\cup(B_{i_0}\to C_{i_0})](x_{i_0},y_{i_0})\\&=\begin{cases}1, & (A_{i_0}(x_{i_0})\wedge B_{i_0}(x_{i_0}))\leqslant C_{i_0}(y_{i_0}),\quad i_0\in\{1,2,\cdots,n\},\\0, & \text{其它}.\end{cases}\end{aligned}$$
其中
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

5° 如果 x_1 是 A_1 且 … 且 x_n 是 A_n 则 y 是 B.

推理模型
$$R=(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\to B=(A_1\to B)\cup(A_2\to B)\cup\cdots\cup(A_n\to B),$$
于是有
$$\begin{aligned}R(x,y)&=(A_1\to B)(x_1,y)\vee\cdots\vee(A_n\to B)(x_n,y)\\&=\begin{cases}1, & A_1(x_1)\wedge\cdots\wedge A_n(x_n)\leqslant B(y),\\0, & \text{其它}.\end{cases}\end{aligned}$$
其中
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

6° 如果 A_{11} 且 A_{12} 且 … 且 A_{1n},则 B_1,否则

如果 A_{21} 且 A_{22} 且 … 且 A_{2n},则 B_2,否则

…

如果 A_{m1} 且 A_{m2} 且 … 且 A_{mn},则 B_m.

推理模型为
$$\begin{aligned}R=&[(A_{11}\cap A_{12}\cap\cdots\cap A_{1n})\to B_1]\\&\cap[(A_{21}\cap A_{22}\cap\cdots\cap A_{2n})\to B_2]\\&\cdots\\&\cap[(A_{m1}\cap A_{m2}\cap\cdots\cap A_{mn})\to B_m]\\=&[(A_{11}\to B_1)\cup(A_{12}\to B_1)\cup\cdots\cup(A_{1n}\to B_1)]\\&\cap[(A_{21}\to B_2)\cup(A_{22}\to B_2)\cup\cdots\cup(A_{2n}\to B_2)]\\&\cdots\\&\cap[(A_{m1}\to B_m)\cup(A_{m2}\to B_m)\cup\cdots\cup(A_{mn}\to B_m)].\end{aligned}$$
设
$$A_{ij}\in\mathscr{F}(X_j),\quad B_i\in\mathscr{F}(Y),\quad i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,n.$$
于是,有
$$\begin{aligned}R(x,y)&=\bigwedge_{i=1}^{m}[\bigvee_{j=1}^{n}(A_{ij}\to B_i)(x_i,y)]\\&=\bigvee_{j=1}^{n}(A_{i_0j}\to B_{i_0})(x_{i_0},y)\\&=\begin{cases}1, & \bigwedge_{j=1}^{n}A_{i_0j}(x_{i_0})\leqslant B_{i_0}(y),\\0, & \text{其它}.\end{cases}\end{aligned}$$
其中
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad i_0\in\{1,2,\cdots,m\}.$$

类似上述的推理模型,按实际需要,可以举出许多,因篇幅所限,仅举几个说明而已.

5 小 结

本文说明,我们可以将复杂的模糊推理模型,表示成最优模糊蕴涵 R_s 的并交运算,甚至表示为 0,1 二值的关系.对电路来说,采用 MOS-DYL 工艺做成按 R_s 运算的基本电路[6]再按不同情况,把基本电路按一定规则连接起来,构成所需的复杂的模糊推理电路.由于 MOS-DYL 电路可集成在同一芯片上,且在实现并交运算时速度很高[6]因此利用上述方法构成的模糊推理电路,将会是一种高速的,甚至可能是实现仿人智能化控制很有用的模糊推理电路.

参 考 文 献

[1] 杨纶标.关于模糊 α-真的模糊推理与模型.华南理工大学学报数学专集,1995

[2] 水本雅晴.模糊工学的现状与展望.模糊系统与数学,1993,(1):1—11

[3] Mizumoto, M., Zimmerman, H. J.. Comparison of Fuzzy Reasoning Methods. Fuzzy Sets and Systems, 1982, (3):253—283

[4] 杨纶标,高英仪.模糊数学理论及其应用.广州:华南理工大学出版社,1993,240—243

[5] Dubois, D. and Prade, H.. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York, 1980,68—77

[6] 郑启伦等.用 MOS-DYL 电路兼容的多值逻辑电路.电子学报,1985,(5):1—7

Optimal Fuzzy Implication and Its Applied Research

YANG Lunbiao, ZHENG Qilun and LING Weixin

(Department of Applied Mathematics, South China University, of Technology • Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: Based on the result of [1], in this paper, the properties of the optimal fuzzy implication are discussed. The fuzzy inference rules are proved with the fuzzy α-true and the optimal fuzzy implication. The inference models realized by means of the optimal fuzzy implication are given.

Key words: fuzzy α-true; optimal implication; fuzzy inference

本文作者简介

杨纶标 1940 年生.副教授.1965 年毕业于武汉大学数学系,今在华南理工大学应用数学系任教,曾从事非线性最优化和决策理论的研究,目前的研究兴趣主要是模糊逻辑和模糊推理及其在控制方面的应用.

郑启伦 1938 年生.教授.1960 年毕业于华南工学院,现在华南理工大学从事计算机电路、逻辑、系统及应用方面的教学科研.曾获中国发明专利一项、实用新型专利六项。现任中国计算机学会多值逻辑专业委员会委员、多值逻辑应用专业学组组长.近年在国内外发表研究论文 30 余篇.

凌卫新 1966 年生.讲师.1988 年和 1994 年在华南理工大学分别获得计算机及应用学士学位和计算机组织与系统结构硕士学位,现正从事模糊控制系统、人工智能方面的研究工作.