第12卷第2期
1995年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 2
Apr., 1995

线性状态相似系统

高立群　张嗣瀛
(东北大学自控系·沈阳，110006)

摘要：本文对线性控制系统引入状态相似的概念，该概念是几何相似的一种推广. 分析了线性状态相似系统在能控性，能控分解，以及状态方程反馈解耦等方面的性质. 最后讨论了相应的Riccati代数矩阵方程的解，状态相似与状态对称之间的某种联系.

关键词：状态相似；反馈解耦；状态对称

1 引　　言

相似与对称是系统结构上的两个重要特征，对称反映单一形体自身结构上的特征，而相似反映不同形体具有某些结构上的类似. 目前关于对称性的研究已取得许多重要结果[1,2]，但关于相似性的研究还不多见.

本文针对线性定常系统提出状态相似的概念，分析了线性状态相似系统在能控性，能控分解，以及状态方程反馈解耦等方面的性质. 最后讨论了相应的Riccati代数矩阵方程的解，状态相似与状态对称之间的某种联系.

2 状态相似的概念

首先考察熟知的几何相似. 图1中 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是平面 xy 上两个任意的相似三角形. 可以发现：

1) 在坐标系 xy 不变的情况下，$\triangle A_1B_1C_1$ 经变换 T(图形平移，旋转和放大) 后得到 $\triangle A_2B_2C_2$.

2) 将坐标系 xy 进行 T^{-1} 变换，在新坐标系 $x'y'$ 中，$\triangle A_2B_2C_2$ 变成 $\triangle A_1B_1C_1$.

3) 对坐标系进行 T^{-1} 变换，相当于对坐标进行 T 变换.

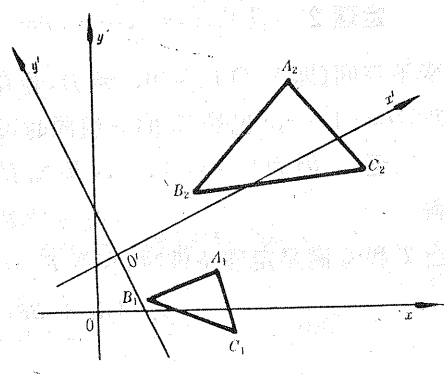

图1　几何相似的说明

将上述事实推广到一般几何图形，则图形1和图形2相似等价于下式成立：

$$\text{图形 } 1 \underset{\text{坐标变换 } T}{\overset{\text{图形变换 } T}{\rightleftharpoons}} \text{图形 } 2 \tag{1}$$

根据上述思想，可将几何相似的概念推广到线性控制系统中.

定义 1　对于线性系统

Σ_1:　　$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$,　$x_1 \in \mathrm{R}^n, u_1 \in \mathrm{R}^m$,

本文于1993年10月13日收到. 1994年6月6日收到修改稿.

Σ_2: $\qquad \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2, \quad x_2 \in \mathrm{R}^n, u_2 \in \mathrm{R}^m.$

如要存在非奇异阵 T, Q_1 和 Q_2 使得

$$A_2 = A_1T = TA_1, \tag{2}$$

$$B_2 = TB_1Q_1 = B_1Q. \tag{3}$$

则称 Σ_1 与 Σ_2 状态相似，记作 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$.

容易看出系统状态相似具有自反性和对称性，但通常不具有传递性.

3 主要结果

定理 1 设 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$，则 Σ_1 能控等价于 Σ_2 能控

证 令

$$M_i = [B_i, A_iB_i, \cdots, A_i^{n-1}B_i], \; i = 1,2,$$

则

$$\begin{aligned} M_2 &= [B_1Q_2, A_1TB_1Q_2, \cdots, (A_1T)^{n-1}B_1Q_2] \\ &= [B_1Q_2, A_1B_1Q_2^2, \cdots, A_1^{n-1}B_1Q_2^n]. \end{aligned}$$

记 $$W = \mathrm{diag}[Q_2^{-1}, (Q_2^{-1})^2, \cdots, (Q_2^{-1})^n],$$

则 W^{-1} 存在，$M_1 = M_2W$，$\mathrm{rank}\ M_1 = \mathrm{rank}\ M_2$，从而定理成立.

推论 两个线性状态相似系统具有相同维数的能控性子空间及相同形式的能控性分解.

定理 2 设 $V_i, i = 1,\cdots,s, \dim V_i = n_i, \sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$，是 Σ_1 的一组同时可积的 (A,B) 不变子空间(即 $V_i \cap V_j = 0, i \neq j$)，若存在非奇异矩阵 T 和 Q 满足 $A_1T = TA_1, TB_1 = B_1Q$，则 $TV_i, i = 1,\cdots,s$ 也是 Σ_1 的一组同时可积的 (A,B) 不变子空间.

证 因为 $V_i, i = 1,\cdots,s$ 是 Σ_1 的一组同时可积的 (A,B) 不变子空间，所以存在 F_1 使得

$$(A_1 + B_1F_1)V_i \subset V_i, \quad i = 1,\cdots,s.$$

当 T 和 Q 满足定理条件时，存在 $\overline{F}_1 = QF_1T^{-1}$ 使得

$$\begin{aligned} (A_1 + B\overline{F}_1)TV_i &= (A_1T + B_1QF_1)V_i \\ &= T(A_1 + B_1F_1)V_i, \\ &\subset TV_i, \quad i = 1,\cdots,s. \end{aligned}$$

从而 TV_i 也是 Σ_1 的同时可积的 (A,B) 不变子空间.

引理 1 设 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$，对 Σ_1 和 Σ_2 分别作非奇异坐标变换 $z_1 = Px_1, z_2 = Px_2$，得新系统

Σ_1': $\qquad \dot{z}_1 = PA_1P^{-1}z_1 + PB_1u_1 \triangleq \overline{A}_1z_1 + \overline{B}_1u_1,$

Σ_2': $\qquad \dot{z}_2 = PA_2P^{-1}z_2 + PB_2u_2 \triangleq \overline{A}_2z_2 + \overline{B}_2u_2,$

则 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$.

证 令 $PTP^{-1} = \overline{T}$，则

$$\overline{A}_2 = \overline{A}_1\overline{T} = \overline{T}\overline{A}_1, \quad \overline{B}_2 = \overline{T}\overline{B}_1 = \overline{B}_1Q_2.$$

从而可知 $\Sigma'_1 \overset{s}{\sim} \Sigma'_2$。

引理 2　设 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$，分别取反馈

$$u_1 = F_1x_1 + Hv_1, \tag{4}$$

$$u_2 = F_2x_2 + Hv_2, \quad F_2 = Q_2^{-1}F_1T. \tag{5}$$

则反馈后 Σ_1 和 Σ_2 仍然相似.

证　将(4),(5) 两式分别代入 Σ_1 和 Σ_2，通过矩阵比较即知引理成立.

定理 3　设 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$，$\Sigma_1$ 和 Σ_2 完全能控，Σ_1 可以状态方程反馈解耦为

$$\Sigma_1, \ \dot{z}_1 = \overline{A}_1z_1 + \overline{B}_1v_1, \quad \overline{A}_1 = \mathrm{diag}[\overline{A}_{11}^{(1)}, \cdots, \overline{A}_{ss}^{(1)}], \quad \overline{B}_1 = \mathrm{diag}[\overline{B}_{11}^{(1)}, \cdots, \overline{B}_{ss}^{(1)}]. \tag{6}$$

那么 Σ_2 也可以状态方程反馈解耦为

$$\Sigma_2, \ \dot{z}_2 = \overline{A}_2z_2 + \overline{B}_2v_2, \quad \overline{A}_2 = \mathrm{diag}[\overline{A}_{11}^{(2)}, \cdots, \overline{A}_{ss}^{(2)}], \quad \overline{B}_2 = \mathrm{diag}[\overline{B}_{11}^{(2)}, \cdots, \overline{B}_{ss}^{(2)}]. \tag{7}$$

这里 $\overline{A}_{ii}^{(k)} \in \mathrm{R}^{n_i\times n_i}$, $\overline{B}_{ii}^{(k)} \in \mathrm{R}^{n_i\times m_i}$, $i = 1,\cdots,s$, $k = 1,2$; $\sum n_i = n$, $\sum m_i = m$.

证　设 Σ_1 在反馈 $u_1 = F_1x + Hv_1$ 后，再由非奇异坐标变换 $z_1 = Px$ 解耦成(6) 形式. 由引理 1,2 可知，对于 Σ_2 施加反馈 $u_2 = QF_1Tx_2 + Hv$ 和变换 $z_2 = Px_2$ 后所得系统(7) 状态相似于系统(6). 由于 Σ_1 完全能控，不失一般性可进一步假设 $\overline{A}_{ii}^{(1)}, i = 1,\cdots,s$ 均为上约旦块直和，且 $\overline{A}_{ii}^{(1)}, \overline{A}_{jj}^{(1)}, i \neq j$ 具有不同的特征值，那么可以证明[3]

$$\overline{A}_2 = \overline{A}_1\overline{T} = \overline{T}\overline{A}_1.$$

其中

$$\overline{T} = PTP^{-1} = \mathrm{diag}[\overline{T}_{11}, \cdots, \overline{T}_{ss}], \ \overline{T}_{ii} \in \mathrm{R}^{n_i\times n_i}, \ i = 1,\cdots,s.$$

进而可知

$$\overline{A}_2 = \mathrm{diag}[\overline{A}_{11}^{(2)}, \cdots, \overline{A}_{ii}^{(2)}], \ \overline{A}_{ii}^{(2)} = \overline{A}_{ii}^{(1)}\overline{T}_{ii} \in \mathrm{R}^{n_i\times n_i},$$

$$\overline{B}_2 = \mathrm{diag}[\overline{B}_{11}^{(2)}, \cdots, \overline{B}_{ii}^{(2)}], \ \overline{B}_{ii}^{(2)} = \overline{T}_{ii}\overline{B}_{ii}^{(1)} \in \mathrm{R}^{n_i\times m_i}, i = 1,\cdots,s.$$

即 Σ_2 具有(7) 式的状态方程解耦形式.

定理 4　设 $\Sigma_1 \overset{s}{\sim} \Sigma_2$，$\Sigma_i$ 完全能控，P_i 为 Σ_i 对应的 Riccati 代数矩阵方程

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iB_iR^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + Q = 0, \quad I = 1,2. \tag{8}$$

(其中 $R > 0, Q = C^{\mathrm{T}}C \geqslant 0$. (C,A) 可观测) 的解，且 $P_2T = T^{\mathrm{T}}P_2$，那么 $P_1 = TP_2$.

证　将方程(8) 改写为

$$P_1A_2 + A_1^{\mathrm{T}}P_1 - P_1B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_2 + Q = 0, \tag{9}$$

$$P_2A_1T + T^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P_2 - P_2TB_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}P_2 + Q = 0. \tag{10}$$

则 P_1 和 P_2 分别为方程(9) 和(10) 的唯一正定解. 再把(10) 式改写成

$$P_2TA_1 + A_1^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}P_2 - P_2TB_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}P_2 + Q = 0.$$

可知 P_2T 也是方程(9) 的解. 由解的唯一性可知 $P_2T = P_1$.

定义 2　在线性系统

$$\Sigma: \quad \dot{x} = Ax + Bu, \ x \in \mathrm{R}^n, u \in \mathrm{R}^m \tag{11}$$

中，如果存在线性变换群 G，对于 $\forall\, g \in G$ 有

$$gA = Ag, \quad gB = BQ, \quad Q \in \mathrm{R}^{m\times m},$$

则称系统(11)具有状态对称.

定理 5 设线性系统 Σ_1 状态对称,G 为所对应的线性变换群,那么对于 $\forall\ g \in G$,系统

Σ_3:
$$\dot{x}_2 = A_1 g x_2 + g B_1 u_2, \tag{12}$$

与 Σ_1 状态相似.如果进一步假设 G 可交换,则 Σ_3 也关于群 G 具有状态对称性.

证 由状态相似定义直接可得出 $\Sigma_1 \overset{S}{\sim} \Sigma_3$.下面令 $\tilde{g}$ 为 G 中任意元素,那么

$$\tilde{g}A_1 g = A_1 \tilde{g} g, \ \tilde{g} g B_1 = \tilde{g} B_1 D_1 = B_1 D_2 D_1 \triangleq B_1 D.$$

当 G 可交换时

$$\tilde{g} A_1 g = A_1 g \tilde{g}.$$

于是可知 Σ_3 也关于 G 对称.

推论 如群 G 可交换,那么关于 G 状态对称的所有线性系统均相似,并且形成一等价关系.

参 考 文 献

[1] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I.. The Structure of Nonlinear Control Possessing Symmetries. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1985, AC—30(3): 248—2588

[2] Hazewinkel, M. and Martin, C.. Symmetric Linear Systems: An Application of Algebraic Systems Theory. Int. J. Contr., 1983, 37(6): 1371—1384

[4] 谢小信.对称性控制系统的结构分析.东北大学自动控制系博士学位论文,1992

The Linear Systems Possessing State Similarity

GAO Liqun and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, a concept of state similarity is introduced for linear systems. Controllability, controllability decomposition and decomposition of state equation with feedback are researched. Finally, the ralation between state similarity and state symmetry is also discussed.

Key words: state similarity; decomposition with feedback; state symmetry

本文作者简介

高立群 1949年生.1984年于东北工学院自控系研究生毕业,1987年~1989年在荷兰Delft工业大学学习,1990年获博士学位.现为东北大学自控系副教授.研究方向为对策理论及复杂系统的辨识与控制.

张嗣瀛 1925年生.1948年毕业于武汉大学机械系,1957~1959年赴前苏联莫斯科大学数学力学系进修.现为东北大学自控系教授,博士生导师.主要研究方向为对策理论及复杂控制系统结构分析.