第 12 卷第 2 期
1995 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 2
Apr., 1995

时变参数的一种快速跟踪最小二乘估计方法

刘整社
(北京航空航天大学自动控制系·北京, 100083)

摘要:给出时变参数的一种快速跟踪最小二乘估计方法.该方法对测量数据同时引入指数加权因子和矩形窗,综合了渐消记忆法和限定记忆法的优点.利用抗病态的正交变换法求解估计值,以减小权固子和窗长度,提高了估计值的跟踪速度.

关键词:时变系统;参数估计;最小二乘法

1 引 言

时变参数的在线估计,通常是通过对测量数据进行预处理实现的.预处理的方法主要有两类:一是引入遗忘因子,通过对历史数据的指数加权,以逐渐消除旧数据影响的渐消记忆法[1];二是引入矩形窗,拨掉部分旧数据,而只截取一段新数据的限定记忆法[2].

这两类方法各有千秋[3],渐消记忆法突出最新数据,但消除历史数据影响的速度比较缓慢;限定记忆法消除旧数据影响的速度比较快,但对所截取的数据同等看待,不能突出最新数据,估计结果相当于在矩形窗所对应的时间段上做了平均.

本文将两种方法综合,给出一种具有快速跟踪性的时变参数最小二乘估计方法.该方法引入矩形窗,以便比较快地消除旧数据的影响.同时,又引入遗记因子,通过对历史数据的指数加权,以突出数据的最新变化.

为了进一步提高跟踪速度,使遗忘因子和矩形窗的长度可以选得小一些,本文采用了数值稳定性好、抗病态的正交变换法[4]求解最小二乘估计值.收到了很好的效果.

2 问题的数学描述

考虑系统

$$y(m) = \varphi_m^{\mathrm{T}}\theta + \xi(m). \tag{1}$$

式中,$y(m)$ 是 m 时刻系统的输出测量值,φ_m 是由系统在 m 以前时刻的输出测量序列 $\{y(k)\}$;输入测量序列 $\{u(k)\}$;或 $\{y(k)\}$ 和 $\{u(k)\}$ 构成的 n 维向量,θ 是待估计的 n 维时变参数向量. $\xi(m)$ 是方差为 σ^2 的零均值无关噪声.我们的目的是,在线地估计 θ,使下面的指标函数为最小.

$$J(m) = \sum_{i=m-L+1}^{m} \lambda^{n-i}[y(i) - \varphi_i^{\mathrm{T}}\theta]^2. \tag{2}$$

式中 $L \geqslant n$ 是矩形窗的长度,$0 < \lambda \leqslant 1$ 是遗忘因子.

显然,$J(m)$ 的极小化与下式等价(类似情况可参见[5]):

本文于 1993 年 7 月 27 日收到.1994 年 5 月 23 日收到修改稿.

$$\| \Phi_m \beta \| = \min. \tag{3}$$

式中，$\| \cdot \|$ 表示 Eucliden 范数，以及

$$\begin{cases} \Phi_m = \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{L-1}{2}} \psi_m^{\mathrm{T}} - L + 1 \\ \lambda^{\frac{L-2}{2}} \psi_m^{\mathrm{T}} - L + 2 \\ \vdots \\ \lambda^{\frac{1}{2}} \psi_m^{\mathrm{T}} - 1 \\ \psi_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \\ \psi_m = [\varphi_m^{\mathrm{T}} \vdots - y(m)]^{\mathrm{T}}, \\ \beta = [\theta^{\mathrm{T}} \vdots 1]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4}$$

设 Φ_{m-1}^* 和 Φ_m^* 分别是矩阵 Φ_{m-1} 和 Φ_m 经正交变换所得到的上三角矩阵，只要能由 Φ_{m-1}^* 递推 Φ_m^*，再加上三解矩阵的参数回代公式[5]，就可以得到我们所要求的递推算法.

3 增加新方程的递推运算

与 Φ_{m-1} 相比，Φ_m 中多了 φ_m^{T} 一行，少了 $\lambda^{L/2}\psi_{m-L}^{\mathrm{T}}$ 一行，并且其余各行均需乘以 $\lambda^{1/2}$. 所以，m 时刻要增加的新方程为：

$$\psi_m^{\mathrm{T}} \beta = 0. \tag{5}$$

令

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} \Phi_{m-1} \\ \vdots \\ \psi_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} \Phi_{m-1}^* \\ \vdots \\ \psi_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

假设 Ω_1^* 和 Ω_2^* 分别是由矩阵 Ω_1 和 Ω_2 经 Householder 变换所得到的上三角矩阵，则有[5]：

$$\Omega_1^* = - \Omega_2^*. \tag{7}$$

(7) 式说明，m 时刻增加新方程的递推运算，可以在 $m-1$ 时刻已得到的上三角矩阵的基础上进行. 文献[6] 中导出了这种形式的递推公式：

$$\begin{cases} \text{For } i = 1, 2, \cdots n \quad \text{Loop} \\ \quad \alpha_i = [(\psi_{i,i}^{(i)})^2 + (\psi_{m,i}^{(i)})^2]^{1/2}, \\ \quad \sigma_i = \alpha_i(\alpha_i + |\psi_{i,i}^{(i)}|), \\ \quad \eta_i = \psi_{i,i}^{(i)} + \mathrm{sign}(\psi_{i,i}^{(i)})\alpha_i, \\ \quad \eta_i' = \eta_i/\sigma_i, \quad \mu_i' = \psi_{m,i}^{(i)}/\sigma_i; \\ \quad \text{For } j = i, i+1, \cdots, n+1 \text{ Loop} \\ \quad \tau_j = \eta_i \psi_{i,j}^{(i)} + \psi_{m,i}^{(i)} \psi_{m,j}^{(i)}, \\ \quad \psi_{i,j}^{(i+1)} = \psi_{i,j}^{(i)} - \eta_i' \tau_j, \\ \quad \psi_{m,j}^{(i+1)} = \psi_{m,j}^{(i)} - \mu_i' \tau_j. \\ \quad \text{End of Loop } j \\ \text{End of Loop } i \end{cases} \tag{8}$$

4 删除旧方程的递推运算

M 时刻要删除的旧方程为

$$\lambda^{\frac{L}{2}}\psi_{m-L}\beta = 0. \tag{9}$$

令

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{L}{2}}\psi_{m-L}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \Phi_m \end{bmatrix}, \ \Psi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \vdots \\ \lambda^{\frac{L}{2}}\psi_{m-L}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

假设 Ψ_1^* 和 Ψ_2^* 分别是由矩阵 Ψ_1 和 Ψ_2 经 Householder 变换所得到的上三角矩阵，则有

$$\Psi_1^* = (-1)^{\delta}\Psi_2^*. \tag{11}$$

式中，当矩阵 Ψ_1 和 Ψ_2 的第一个主对角线元素同号时，$\delta = 0$，反之，$\delta = 1$.

先考虑 $\delta = 0$ 的情形. 这时

$$\Psi_1^* = \Psi_2^*. \tag{12}$$

(12) 式说明，矩阵 Ψ_1 和 Ψ_2 具有相同的上三角阵. 所以，可以将 Ψ_1^* 看成是矩阵 Ψ_2 由(8) 式经 Householder 变换得到的. 因此，删除旧数据，也就是删除矩阵 Ψ_1 的第一行 $\lambda^{L/2}\psi_{m-L}$ 所得到的矩阵 Φ_m，可以通过(8) 式的逆运算由矩阵 Ψ_2^* 得到.

逆运算公式很容由(8) 式导出：

$$\begin{cases} \text{For } \ i = 1,2,\cdots n \quad \text{Loop} \\ \qquad a_i = |\psi_{i,i}^{(i)}| \\ \qquad \psi_{i,i}^{(i)} = -\operatorname{sign}(\psi_{i,i}^{(i)})[\alpha_i^2 - \psi_{n+1,i}^{(i)\,2}]^{1/2}, \sigma_i = \alpha_i(\alpha_i + |\psi_{i,i}^{(i)}|), \\ \qquad \eta_i = \psi_{i,i}^{(i)} + \operatorname{sign}\ (\psi_{i,i}^{(i)})\alpha_i, \\ \qquad \eta_i' = \eta_i/\sigma_i, \ \mu_i' = \psi_{m,i}^{(i)}/\sigma_i; \\ \qquad \text{For } j = i, i+1, \cdots, n+1 \text{ Loop} \\ \qquad \psi_{i,j}^{(i+1)} = [\psi_{i,j}^{(i)} + \eta_i'\psi_{n+1,i}^{(i)}\psi_{n+1,j}^{(i)}]/(1 - \eta_i'\eta_i), \\ \qquad \tau_j = \eta_i\psi_{i,j}^{(i)} + \psi_{m,i}^{(i)}\psi_{m,j}^{(i)}, \\ \qquad \psi_{m,j}^{(i+1)} = \psi_{m,j}^{(i)} - \mu_i'\tau_j, \\ \qquad \text{End of Loop } j \\ \text{End of Loop } i \end{cases} \tag{13}$$

当 $\delta = 1$ 时，将 Ψ_1^* 用 $-\Psi_2^*$ 替换，(13) 式的形式不变. 所以，(13) 式在两种情况下均成立.

5 仿真计算

我们用三个测试例子对本文方法进行了测试. 测试系统的输入激励信号是零均值、单位方差的无关噪声，干扰信号是标准差为 0.1 的零均值无关噪声.

例 1 考虑如下 2 阶动态系统

$$\begin{aligned} y(k) = a_1y(k-1) - 0.98y(k-2) + u(k) + 2.0u(k-1) \\ + 0.5u(k-2) + \xi(k), \ k = 1,2,\cdots,500. \end{aligned} \tag{14}$$

式中,参数 a_1 的值在 $k=206$ 处从 -1.96 跳变到 -1.5. 估计结果及其与真值的比较示于图1.

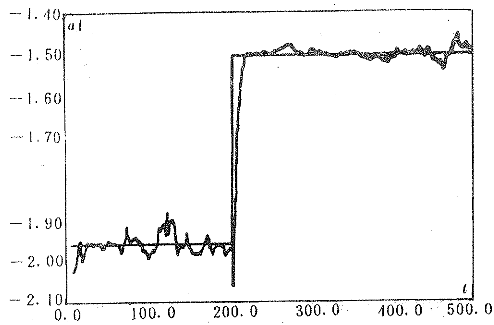

图1　例1的估计结果

例2　模型结构与例1相同,但

$$a_1(k)=-1.5+0.5\sin(2k\pi/10),\quad k=1,2,\cdots,500. \tag{15}$$

例3　模型结构仍与例1相同,但

$$a_1(k)=-1.5+0.5\mathrm{sign}[\sin(2k\pi/10)],\quad k=1,2,\cdots,500. \tag{16}$$

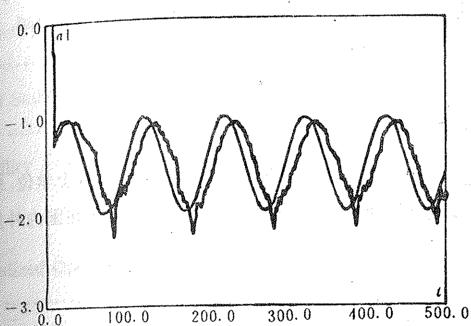

图2　例2的估计结果

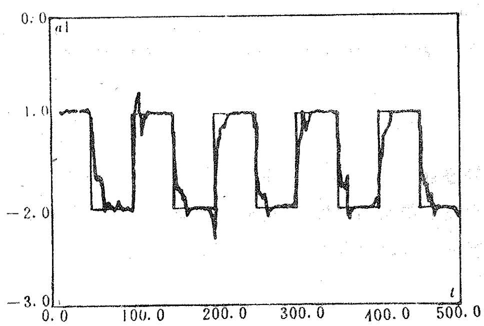

图3　例3的估计结果

6 结　　论

本文给出了一种时变参数的快速跟踪最小二乘估计方法. 该方法同时引入遗忘因子和矩形窗,综合了渐消记忆和限定记忆两种方法在跟踪速度上的优点. 此外,本文方法是基于最小二乘问题的正交变换解法导出的,不仅精度高、数值稳定好,而且抗病态能力强,所以,可以选用比较小的遗忘因子和窗长度. 因此,本文方法具有相当快的跟踪速度. 仿真计算结果表明,在跟踪阶跃、正弦、方波等剧烈变化的时变参数时,本文方法大约只有 $20T$ 的延迟.

参　考　文　献

[1] 刘整社. 时变参数估计的递推 Househlder 变换渐消记忆法. 信号处理, 1991, 7(4): 220—228

[2] 刘整社. 基于正交变换的时变参数限定记忆估计法. 自动化学报, 1993, 19(4): 715—719

[3] Houacine, A.. Regularized fast recursive least squares algorithms for finite memory filtering. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40(4): 758—749

[4] 刘整社等. 矩阵上三角化的递推 Householder 变换公式及其应用. 自动化学报, 1990, 16(2): 142—145

[5] Liu Zheng She. On-line parameter identification algorithms based on Householder transformation. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41(9): 2863—2871

[6] 刘整社等. 差分模型参数递推估计的 Householder 变换法. 自动化学报, 1992, 18(3): 315—324

A Least Squares Method for the Parameter Estimation of Quickly Varying Systems

LIU Zhengshe

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics • Beijing, 100083, PRC)

Abstract: A least squares method for the parameter estimation of quickly systems is proposed. The forgetting factor and the rectangular window are simultaneously introduced in the method so that the benifits of both methods are utilized. In order to solve the problem of ill-condition where the little forgetting factor and the window length are chosen to follow the tracks of varying parameters quickly, an orthogonal transformation method is used.

Key words: time-varying system; parameter estimation; least squares method

本文作者简介

刘整社 1959年生. 分别于1982年,1984年和1990年在北京航空航天大学获工学学士、硕士和博士学位. 现任该校自动控制系副教授,主要研究方向为辨识与参数估计、系统仿真、并行处理、分布式控制等. 近年来在国内外重要杂志和国际会议发表文章三十余篇.