第 12 卷第 3 期
1995 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 3
Jun., 1995

混合灵敏度问题的鲁棒 H_∞/LTR 设计方法*

翁正新　王广雄

(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨，150001)

摘要：本文对具有输出乘型不确定性的 H_∞ 混合灵敏度问题进行了研究，提出了一种新的鲁棒 H_∞/LTR 设计方法. 这种设计方法由三部分组成：首先针对对偶系统设计一个 H_∞ 全状态反馈控制，使得系统满足性能和鲁棒性要求. 其次设计一个全状态观测器，使得上述状态反馈的特性得以恢复. 最后综合出满足原系统性能和鲁棒性要求的输出反馈动态控制律.

关键词：H_∞/LTR 控制；H_∞ 状态反馈；鲁棒控制

1 引　　言

混合灵敏度问题是 H_∞ 控制的最典型问题之一，H_∞ 控制的应用工作很多都集中在混合灵敏度 H_∞ 优化设计问题上，而且混合灵敏度问题极易表示成 H_∞ 标准问题. H_∞ 标准问题的求解方法很多，常用的主要可分为两大类，即标准问题的频域解法和状态空间解法[1]，最常用的方法是 Doyle 等人[2] 提出的“2-Riccati”状态空间 H_∞ 设计方法，这种方法极大地简化了算法，且控制器具有良好的结构. 文[2] 指出这种 2-Riccati 方程的方法设计出来的控制器具有观测器 - 控制器结构. 因此人们很自然就会想到能否直接从状态反馈的角度来设计鲁棒 H_∞ 输出反馈控制律，这正是本文的目的所在.

大家知道，在状态估计反馈设计中，系统的动态和观测器的动态可以分开考虑，这就是所谓的分离原理. 但是对于不确定系统来说，这一原理就不再适用了，于是 Doyle 等人[3] 提出了回路传递函数恢复(LTR) 方法. 这种方法的思想是：首先设计一个静态状态反馈控制律，以满足系统的性能和鲁棒稳定要求. 其次设计状态估计反馈，即寻找观测器增益，使得上述状态反馈的特性得到恢复.

H_∞ 控制理论在处理多变量系统的性能设计和鲁棒稳定性方面具有无可比拟的优越性，因此 H_∞ 控制与 LTR 的结合是很自然的，这就是所谓的 H_∞/LTR 设计方法，已经有一些关于这方面的报道[4,5]. 本文对 H_∞/LTR 方法进行了一些改进，并将其应用于输出乘型不确定系统的 H_∞ 混合灵敏度问题.

2 混合灵敏度 H_∞ 优化设计问题

控制中的许多不同要求的 H_∞ 优化问题都可归结为混合灵敏度 H_∞ 优化设计问题. 本文主要研究图 1 所示的输出乘型不确定系统的混合灵敏度(S/T) 优化问题，其中权函数 W_2 和 W_1 分别反映了系统在模型不确定下的鲁棒稳定性要求和干扰作用下的性能要求.

---

* 国家高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于 1993 年 9 月 28 日收到. 1994 年 10 月 21 日收到修改稿.

混合灵敏度 H_∞ 优化问题可以表示成图 2 所示的标准问题，图中 $P(s)$ 为广义对象，包括实际被控对象和加权函数，$K(s)$ 为所要设计的镇定控制器，$w\in R^{m_1}$ 表示外输入信号，$u\in R^{m_2}$ 表示控制信号，$z\in R^{p_1}$ 表示被控外输出信号，$y\in R^{p_2}$ 表示被测量信号. 根据输入输出关系，广义对象 $P(s)$ 为

$$P(s)=\left[\begin{array}{c:c}P_{11}&P_{12}\\ \hdashline P_{21}&P_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}W_1&W_1G\\ 0&W_2G\\ \hdashline I&G\end{array}\right] \tag{1}$$

外输入 $w(=d)$ 到外输出 $z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$ 的闭环传递函数为

$$T_{zw}=F_l(P,K)=\begin{bmatrix}W_1(I-GK)^{-1}\\ W_2GK(I-GK)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_1S\\ W_2T\end{bmatrix}. \tag{2}$$

设计要求为求取一镇定控制器 $K(s)$，以满足

$$\|T_{zw}\|_\infty<1. \tag{3}$$

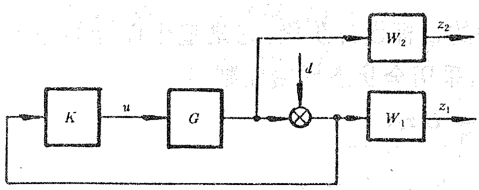

图 1　S/T 问题

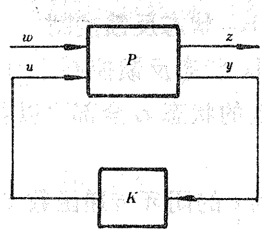

图 2　标准问题

设名义对象和权函数的状态空间实现分别为

$$G=\left[\begin{array}{c:c}A_g&B_g\\ \hdashline C_g&0\end{array}\right],\quad W_1=\left[\begin{array}{c:c}A_{w_1}&B_{w_1}\\ \hdashline C_{w_1}&D_{w_1}\end{array}\right],\quad W_2=\left[\begin{array}{c:c}A_{w_2}&B_{w_2}\\ \hdashline C_{w_2}&D_{w_2}\end{array}\right].$$

则广义对象 $P(s)$ 的状态空间实现为

$$P(s)=\left[\begin{array}{c:c}P_{11}&P_{12}\\ \hdashline P_{21}&P_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c:c}A&B_1&B_2\\ \hdashline C_1&D_{11}&D_{12}\\ \hdashline C_2&D_{21}&D_{22}\end{array}\right]. \tag{4}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}A_{w_1}&0&B_{w_1}C_g\\ 0&A_{w_2}&B_{w_2}C_g\\ 0&0&A_g\end{bmatrix},\quad B=[B_1\ B_2]=\left[\begin{array}{c:c}B_{w_1}&0\\ 0&0\\ 0&B_g\end{array}\right],$$

$$C=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}C_{w_1}&0&D_{w_1}C_g\\ 0&C_{w_2}&D_{w_2}C_g\\ \hdashline 0&0&C_g\end{array}\right],\quad D=\left[\begin{array}{c:c}D_{11}&D_{12}\\ \hdashline D_{21}&D_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}D_{w_1}&0\\ 0&0\\ \hdashline I&0\end{array}\right]. \tag{5}$$

由(5)式可知 $D_{12}=0$，这就是所谓的奇异 H_∞ 问题，此时‘DGKF’方法已经不能胜任. 常规的处理方法[6]是通过适当地选取权函数 W_2 的形式(即为多项式形式)，并利用 W_2G 状态空间的特殊形式来重构 $P(s)$ 的状态空间表示，此时矩阵 $D_{12}\neq 0$，可以采用‘DGKF’方法求

解. 但是这种处理方法限制了权函数 W_2 的选取，本文提出的鲁棒 H_∞/LTR 设计方法可以直接应用于上述奇异 H_∞ 问题.

3 鲁棒 H_∞/LTR 设计方法

考虑广义系统(4) 的对偶系统 $P_d(s)$

$$P_d(s)=\left[\begin{array}{c:cc} A' & C_1' & C_2' \\ \hdashline B_1' & D_{11}' & D_{21}' \\ B_2' & D_{12}' & D_{22}' \end{array}\right]. \tag{6}$$

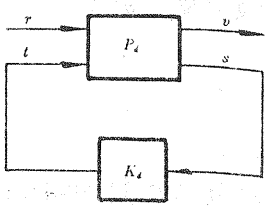

图 3 对偶问题

其中撇号表示矩阵转置. 对偶问题的框图如图 3 所示，其中 $r\in R^{p_1}$ 为对偶问题的外输入信号，$t\in R^{p_2}$ 为对偶问题的控制信号，$v\in R^{m_1}$ 为对偶问题的被控外输出信号，$s\in R^{m_2}$ 为对偶问题的被测量信号，$K_d(s)$ 为所要设计的使得对偶系统内稳定且满足 $\|T_{vr}\|_\infty<1$ 的动态控制器. 本文假设广义系统(4) 满足 (A,B_2) 可镇定，(C_2,A) 可检测.

3.1 H_∞ 状态反馈控制

H_∞ 状态反馈控制是 H_∞/LTR 设计中的目标设计阶段，它是整个设计的基础. 假设对偶系统的状态 x_d 全部可以获得，即 $s=x_d$，采用全状态反馈控制律

$$t=L'x_d, \tag{7}$$

则 r 到 v 的闭环传递函数 T_{vrf} 为

$$T_{vrf}=(B_1'+D_{21}'L')(sI-A'-C_2'L')^{-1}C_1'+D_{11}', \tag{8a}$$

或

$$T_{vrf}=B_1'(sI-A')^{-1}C_1'+D_{11}'+[B_1'(sI-A')^{-1}C_2'+D_{21}']T_{trf}, \tag{8b}$$

其中

$$T_{trf}=L'(sI-A'-C_2'L')^{-1}C_1'. \tag{9}$$

根据(1) 和(4) 式，(8b) 式可以化为

$$T_{vrf}=[W_1' \quad 0]+T_{trf}. \tag{10}$$

目标设计可以描述成下列问题.

问题 1 对于充分小的 $0<\xi<1$，设计全状态反馈控制律 $t=L'x_d$，使闭环系统内稳定且满足

$$\|T_{vrf}\|_\infty<1-\xi. \tag{11}$$

本文采用文[7] 中的方法来求解问题 1. 为了叙述方便，首先作如下定义：

$$\begin{aligned}
&\alpha:=1-\xi;\\
&E:=[I+D_{11}'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1}D_{11}]^{-1};\\
&A_H:=A'+C_1'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1}D_{11}B_1';\\
&B_H:=C_2'+C_1'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1}D_{11}D_{21}';\\
&C_H:=\{I+D_{11}'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1}D_{11}\}^{1/2}B_1';\\
&D_H:=C_1'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1/2};\\
&E_H:=\{I+D_{11}'(\alpha^2I-D_{11}D_{11}')^{-1}D_{11}\}^{1/2}D_{21}'.
\end{aligned}$$

其中 $D_{21}=I$.

定理 1 考虑系统(6)，假设状态 x_d 全部可以获得，则对于充分小的 $0<\xi<1$，存在一

状态反馈增益 L'，使得 $A'+C_2'L'$ 为稳定阵且 $\|(B_1'+D_{21}'L')(sI-A'-C_2'L')^{-1}C_1'+D_{11}'\|_\infty<1-\xi$ 的充要条件是 $\alpha^2I-D_{11}D_{11}'>0$ 且存在 $\varepsilon_1>0$ 使得代数 Riccati 方程(12) 有正定对称解 X_∞.

$$
\begin{aligned}
(A_H-B_HEE_H'C_H)'X+X(A_H-B_HEE_H'C_H)+X(D_HD_H'-B_HEB_H')X \\
+C_H'(I-E_HEE_H')C_H+\varepsilon_1I=0,
\end{aligned} \tag{12}
$$

而且当上述条件满足时，要求的状态反馈增益 L' 为

$$L'=-E(B_H'X_\infty+E_H'C_H). \tag{13}$$

3.2 闭环传递函数恢复

H∞/LTR 恢复过程就是设计一个动态控制器，使得上述 H∞ 状态反馈控制的特性得以恢复. 本文采用下述状态估计反馈控制律

$$\dot{\hat{x}}=A'\hat{x}+C'_2t+F'(B_2'\hat{x}-s), \tag{14a}$$

$$t=L'\hat{x}. \tag{14b}$$

其中 L' 为 H∞ 状态反馈增益，可由(13) 式给出. F' 为观测器增益，为待求参数. 此时动态控制器 $K_d(s)$(即由 s 到 t 的传递函数) 为

$$K_d(s)=-L'(sI-A'-C_2'L'-F'B_2')^{-1}F'. \tag{15}$$

r 到 v 的闭环传递函数 T_{vr} 为

$$T_{vr}=B_1'(sI-A')^{-1}C_1'+D_{11}'+[B_1'(sI-A')^{-1}C_2'+D_{21}']T_{tr}. \tag{16}$$

其中

$$T_{tr}=K_dB_2'(sI-A'-C_2'K_dB_2')^{-1}C_1'. \tag{17}$$

根据(1) 和(4) 式，(16) 式可写为

$$T_{vr}=[W_1'\quad 0]+T_{tr}. \tag{18}$$

(10) 式减去(18) 式可得　$E(s):=T_{vrf}-T_{vr}=T_{trf}-T_{tr}.$　(19)

本文称 $E(s)$ 为闭环恢复误差. 下面推导 $E(s)$ 的表达式，不难验证：

$$
\begin{aligned}
K_d(s)B_2' &=-L'[I-(sI-A'-C_2'L')^{-1}F'B_2']^{-1}(sI-A'-C_2'L')^{-1}F'B_2' \\
&=L'-L'[I-(sI-A'-C_2'L')^{-1}F'B_2']^{-1}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&(sI-A'-C_2'K_dB_2')^{-1} \\
&\quad=[sI-A'-C_2'L'+C_2'L'(sI-A'-C_2'L'-F'B_2')^{-1}(sI-A'-C_2'L')]^{-1} \\
&\quad=(sI-A'-C_2'L')^{-1}[I+C_2'L'(sI-A'-C_2'L'-F'B_2')^{-1}]^{-1} \\
&\quad=(sI-A'-C_2'L')^{-1}[(sI-A'-F'B_2')(sI-A'-C_2'L'-F'B_2')^{-1}]^{-1} \\
&\quad=(sI-A'-C_2'L')^{-1}[I-C_2'L'(sI-A'-F'B_2')^{-1}].
\end{aligned} \tag{21}
$$

则

$$
\begin{aligned}
T_{tr} &=\{L'-L'[I-(sI-A'-C_2'L')^{-1}F'B_2']^{-1}\}(sI-A'-C_2'K_dB_2')^{-1}C_1' \\
&=L'(sI-A'-C_2'L')^{-1}[I-C_2'L'(sI-A'-F'B_2')^{-1}]C_1' \\
&\quad-L'[I-(sI-A'-C_2'L')^{-1}F'B_2']^{-1}(sI-A'-C_2'L')^{-1} \\
&\quad\cdot(sI-A'-C_2'L'-F'B_2')(sI-A'-F'B_2')^{-1}C_1' \\
&=L'(sI-A'-C_2'L')^{-1}C_1'-L'(sI-A'-C_2'L')^{-1}C_2'L'(sI-A'-F'B_2')^{-1}C_1' \\
&\quad-L'(sI-A'-F'B_2')^{-1}C_1'
\end{aligned}
$$

$$= T_{vrf} - [L'(sI - A' - C_2'L')^{-1}C_2' + I]L'(sI - A' - F'B_2')^{-1}C_1'. \tag{22}$$

所以 $E(s)$ 的表达式为

$$E(s) = T_{vrf} - T_{vr} = N(s)M(s). \tag{23}$$

其中

$$N(s) = L'(sI - A' - C_2'L')^{-1}C_2' + I,$$

$$M(s) = L'(sI - A' - F'B_2')^{-1}C_1'. \tag{24}$$

本文称 $M(s)$ 为闭环恢复矩阵. 由定理1易知 $N(s) \in \mathrm{RH}_\infty$, 记 $\delta = \|N(s)\|_\infty$. 恢复过程可以用问题2来描述.

问题2 对于问题1中的充分小的正数 ξ, 求取一观测器增益 F', 使得闭环恢复误差阵 $E(s)$ 稳定且满足 $\|E(s)\|_\infty < \xi$.

由文[7]可得下述定理:

定理2 给定 $\gamma = \xi/\delta$, 则存在一观测器增益 F', 使得 $A' + F'B_2'$ 为稳定阵且 $\|M(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得代数 Riccati 方程(25)有正定对称解 Y_∞.

$$A'Y + YA - Y\left\{\frac{1}{\varepsilon_2}B_2B_2' - \frac{1}{\gamma^2}LL'\right\}Y + C_1'C_1 + \varepsilon_2 I = 0, \tag{25}$$

而且当上述条件满足时, 要求的观测器增益 F' 为

$$F' = -\frac{1}{2\varepsilon_2}Y_\infty B_2. \tag{26}$$

H_∞/LTR 优化算法:

1) 选择权函数 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$;

2) 根据(5)式形成广义对象 $P = (A, B, C, D)$;

3) 给定充分小的 $0 < \xi < 1$, 根据定理1, 设计增益阵 L. 若对于充分小的 ε_1, 代数 Riccati 方程(12)都没有正定对称解, 则降低性能权函数 $W_1(s)$ 的幅值, 并返回2). 若(12)有正定对称解, 则增大性能权函数 $W_1(s)$ 的幅值, 并返回2). 如此迭代数次即可获得满意的性能权函数及相应的增益阵 L;

4) 计算 $\delta = \|N(s)\|_\infty$;

5) 根据定理2, 计算增益阵 F. 若对于充分小的 ε_2, 代数 Riccati 方程(25)都没有正定对称解, 则增大 ξ, 并回到3), 否则可由(26)式计算出增益阵 F.

最后, 以定理的形式给出本文的主要结论.

定理3 假设定理1和定理2的条件均满足, 则

1° 使得对偶系统 $P_d(s)$ 内稳定且满足 $\|T_{vr}\|_\infty < 1$ 的动态控制器为

$$K_d(s) = \begin{bmatrix} A' + C_2'L' + F'B_2' & -F' \\ L' & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

2° 使得原系统 $P(s)$ 内稳定且满足 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 的动态控制器为

$$K(s) = K_d'(s) = \begin{bmatrix} A + LC_2 + B_2F & -L \\ F & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

由前文易知定理3是显然成立的.

4 结束语

本文以输出乘型不确定系统的混合灵敏度问题为背景，给出了鲁棒 H_∞/LTR 设计方法. 这种方法综合考虑了 H_∞ 理论和 LTR 方法的优点，具有控制器结构简单、明确等特点，且能处理奇异 H_∞ 设计问题，具有很好的发展和应用前景.

参 考 文 献

[1] Kwakernaak, H.. Robust Control and H_∞-Optimization——Tutorial Paper. Automatica, 1993, 29(2):255—273

[2] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A.. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34(8):831—847

[3] Doyle, J. C. and Stein, G.. Robustness with Observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, AC-24:607—611

[4] Saeki, M.. H_∞/LTR Procedure with Specified Degree of Recovery. Automatica, 1992, 28(3): 509—517

[5] Chen, B. M., Saberi, A., Ly Uy-Loi and Ebrahimi, Y. S.. Design of Localizer Capture and Track Hold for a Transport Airplane: An H_∞/LTR Approach. Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control. Honolulu, Hawaii, 1990, 3349—3350

[6] 姚一新，H^∞控制理论及应用研究. 哈尔滨工业大学博士学位论文，1991

[7] Zhou, K. and Khargonekar, P. P.. An Algebraic Riccati Equation Approach to H^∞ Optimization. Systems and Control Letters, 1988, 11:85—92

Robust H_∞/LTR Design Methods for Mixed Sensitivity Problems

WENG Zhengxin　and　WANG Guangxiong

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology • Harbin, 150001, PRC)

Abstract: This paper is concerned with the H_∞ mixed sensitivity problem with output multiplicative uncertainty, and proposes a new robust H_∞/LTR design method. The design procedure developed in this paper consists of three steps. First, an H_∞ full state feedback control is designed for the dual system to satisfy the robustness and performance specifications. Then, the properties of the state feedback are recovered by designing full state observers. Finally, an output feedback dynamic control law for the original systems is implemented to satisfy the design specifications.

Key words: H_∞/LTR control; H_∞ state feedback; robust control

本文作者简介

翁正新　1966 年生. 1989 年毕业于哈尔滨工业大学控制工程系自动控制专业. 1992 年于哈尔滨工业大学控制理论及应用专业获硕士学位. 现为该专业博士研究生. 主要研究方向为 H_∞控制、鲁棒控制.

王广雄　1933 年生. 1957 年毕业于哈尔滨工业大学研究生班，后一直在哈尔滨工业大学任教并从事科研工作，现为该校控制工程系教授，博士生导师. 目前主要研究方向是 H_∞控制理论及应用，鲁棒控制.