

优化 H_∞ -范数的新技术与鲁棒设计*

胡庭姝

(上海交通大学自动控制系统, 200030)

摘要: 本文提出了一种全新的 H_∞ -优化方法: 梯度方法. 这种优化方法非常灵活, 适用范围极广, 可用于对系统矩阵中的一般参数进行优化选择, 可将 H_∞ -范数与其它范数加权, 构成复合的目标函数, 还可处理极点配置等限制条件下的 H_∞ -优化问题. 梯度方法的主要思想就是通过与 H_∞ -范数直接相关的 Hamilton 矩阵定义目标函数 $\rho(\varepsilon, p)$, 具有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, p) = 1 / \|T(s, p)\|_\infty$. 其中 p 可为系统矩阵中的任何可变参数. $\rho(\varepsilon, p)$ 对 p 的导数可以求出, 因而可用梯度方法极大化 $\rho(\varepsilon, p)$, 从而极小化 $\|T(s, p)\|_\infty$. 本文用此方法对结构式不确定系统进行鲁棒设计, 并带有极点配置的约束, 实例显示, 梯度方法的效果很好.

关键词: H_∞ -范数; 梯度方法; Hamilton 矩阵; 特征轨迹; 结构式不确定性

1 引言

作为一种成熟的优化体系, H_∞ -优化理论包括频率域方法和状态空间方法. 从数学上来说, 频域方法的理论很完美, 但对于一般的 H_∞ -优化问题, 其算法却非常繁琐, 以致令人难以承受. 1987 年, 状态空间方法开始了发展, 这一发展在 1989 年以 [1] 达到顶峰并告一段落, 以后的发展仅限于方法的完善和推广, 以及在 H_∞ -范数小于某一正数的限制下优化 H^2 -范数, 即 H^2/H_∞ 混合优化问题.

H_∞ -优化理论的成就非常惊人, 从产生到成熟也很迅速, 但是否就不需要其它新的方法? 是否还存在另外的方法?

在标准的 H_∞ -优化问题中, 被优化的目标函数是某一传递函数的 H_∞ -范数, 限制条件是闭环稳定性. 从传统的规划的角度来看, H_∞ -优化问题的目标函数和限制条件都很特别, 要用数学规划的方法来求解是几乎不可能的. 因此, 已有的两类优化方法也不同于传统的规划方法: 先给定一正数 γ , 通过解 Riccati 方程判别是否存在控制器使 H_∞ -目标函数小于 γ , 不断迭代, 使 γ 逼近优化问题的最优解. 这种方法的优点是能逼近最优解, 而不用考虑优化问题的凸性. 当然, 当 γ 逼近最小值时会出现奇异性等算法问题.

这种独特的求解方式大大限制了 H_∞ -优化方法的灵活性, 标准的 H_∞ -优化问题中, 目标函数只能是单一的 H_∞ -范数, 而不能与别的范数加权, 这往往使得 H_∞ -优化问题的最优解(或次优解)在其它性能上不尽人意, 如高增益反馈, 极点远离虚轴等. 如果能加上极点固定在某一位置或区域的限制条件, 或将反馈矩阵的范数作为惩罚项附加在 H_∞ -范数之后, 优化效果就能得到改善, 本文提出的梯度方法将试图解决这些问题.

另外, 在已有的 H_∞ -优化方法中, 被优化的参数只能是动态反馈或静态反馈, 但对实

* 国家自然科学基金和上海交通大学基金资助项目.

本文于 1993 年 11 月 8 日收到. 1994 年 9 月 6 日收到修改稿.

际系统设计时,可变化,可调整,可选择的参数却不只这些,所以,已有的 H_∞ - 优化方法还未能充分利用系统设计的各种自由度.

规划中最通常的是梯度方法,只要目标函数对变量的导数能求出,那么梯度方法就是简单而有效的途径,缺点是不保证求得最优解,这与已有的 H_∞ - 优化方法正好相反,但随着计算技术的不断提高,运算速度的不断加快,大量选择初值一般能得到满意的结果.

设含可变参数的传递函数为 $T(s, p)$. 从 H_∞ - 范数的最初定义: $\|T(s, p)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[T(j\omega, p)]$, 很难发现求得这一范数对变化参数 p 的梯度的可能性. 本文将采取另一途径,以前的状态空间方法,离不开解一个或两个 Riccati 方程,实际上, Riccati 方程是否有正定解,都依赖于相应的 Hamilton 矩阵是否在虚轴上有特征值. 本文将利用一个与 H_∞ - 范数直接相关的 Hamilton 矩阵定义一函数 $\rho(\varepsilon, p)$, 具有关系: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, p) = 1/\|T(s, p)\|_\infty$. 理论上, ε 可趋近于 0, 即 $P(\varepsilon, P)$ 可无限逼近 $1/\|T(s, p)\|_\infty$. 但具体计算时, ε 趋于 0 也会产生计算奇异性. 实际上,从算例可以看出, ε 不必取得很小, $\rho(\varepsilon, p)$ 就可很好地逼近 $1/\|T(s, p)\|_\infty$.

本文将分析 $\rho(\varepsilon, p)$ 的可微性,并导出 $d\rho(\varepsilon, p)/dp$ 的明确表达式. 随之产生极大化 $\rho(\varepsilon, p)$, 从而极小化 $\|T(s, p)\|_\infty$ 的梯度方法.

本文将用梯度方法求解如下优化问题:

$$\inf \|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_\infty, \quad s.t. \quad V^{-1}(A + BF)V = A_1, \\ D = \text{diag}[d_1 I_{k_1}, d_2 I_{k_2}, \dots, d_N I_{k_N}], \quad d_i > 0.$$

其中 A_1 为具有给定闭环特征值的对角矩阵.

由于篇幅较长,全文将分为两大部分;第一部分,包括第二节至第四节,为一般优化问题的求解,第二部分,包括第五节至第九节,为结构式不确定系统的鲁棒设计.

2 H_∞ - 范数与 Hamilton 矩阵

设 $T(s)$ 是真、有理、稳定的传递函数,其最小状态空间实现是: $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. 则 A 的全部特征值都在开的左半复平面. 记 $H_s(\gamma)$ 为

$$H_s(\gamma) = \begin{bmatrix} -A^T & -C^T C \\ 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C^T D \\ B \end{bmatrix} (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} [B^T \quad D^T C]. \quad (2.1)$$

由[5]中定理 1 可知:

$$\|T(s)\|_\infty = \sup\{\gamma, H_s(\gamma) \text{ 在虚轴上有特征值}\}. \quad (2.2)$$

令

$$A_H = \begin{bmatrix} -A^T & -C^T C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B_H = \begin{bmatrix} -C^T D \\ B \end{bmatrix}, \quad C_H = [B^T \quad D^T C], \quad D_H = D^T D.$$

回顾[5]中定理 1 的证明,有以下结论:

$$T^T(-s)T(s) = C_H(sI - A_H)^{-1}B_H + D_H, \\ \det[\gamma^2 I - T^T(-j\omega)T(j\omega)] = \frac{\det[\gamma^2 I - D_H]}{\det[j\omega I - A_H]} \cdot \det[j\omega I - H_s(\gamma)], \quad (2.3)$$

所以,对于 $\gamma > \bar{\sigma}[D]$, $\det[\gamma^2 I - D_H] \neq 0$.

$$\det[\gamma^2 I - T^T(-j\omega)T(j\omega)] = 0 \Leftrightarrow \det[j\omega I - H_a(\gamma)] = 0. \quad (2.4)$$

由 H_∞ -范数的定义, $\|T(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \lambda_{\max}^{1/2}[T^T(-j\omega)T(j\omega)]$ 可知:

1) 当 $\gamma > \|T(s)\|_\infty$ 时, 不存在 ω 使 $\det[\gamma^2 I - T^T(-j\omega)T(j\omega)] = 0$, 由 (2.4), $H_a(\gamma)$ 在虚轴上没有特征值.

2) 当 $\bar{\sigma}[D] < \gamma \leq \|T(s)\|_\infty$ 时, 总有 ω 使 $\det[\gamma^2 I - T^T(-j\omega)T(j\omega)] = 0$. 即, $H_a(\gamma)$ 在虚轴上有特征值. 至此可得 (2.2) 式的结论. 而当 $\gamma = \|T(s)\|_\infty$ 时, $H_a(\gamma)$ 在虚轴上的特征值的虚部 ω 就是 $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ 取得最大值的 ω_m . 如果 $\gamma = \|T(s)\|_\infty$ 时, $H_a(\gamma)$ 在正

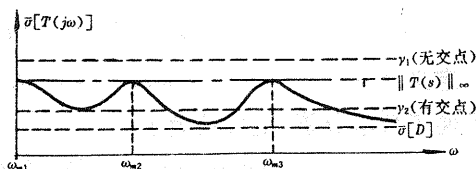


图 1 $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ 的幅频特性与 H_∞ -范数

虚轴(包括原点)上有 $N > 1$ 个特征值, 那么 $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ 在 $\omega \in [0, \infty)$ 范围内有 N 个等高的最大峰值. 如图 1 所示. 图中 ω_{m1} , ω_{m2} 和 ω_{m3} 为取得最大值的频率, 相应地, $H_a(\gamma)$ ($\gamma = \|T(s)\|_\infty$) 在虚轴上的特征值是 $j\omega_{m1}$, $\pm j\omega_{m2}$ 和 $\pm j\omega_{m3}$.

关于 $H_a(\gamma)$, 还有如下性质:

定理 2.1 $H_a(\gamma)$ 是 Hamilton 矩阵, $H_a(\gamma)$ 的特征值关于虚轴和实轴成对称.

证 显然, 由定义可知.

为了便于研究 $H_a(\gamma)$ 的特征轨迹, 以下用 $\frac{1}{k}$ 代入 (2.1) 式中的 γ , 并记 $H_a(\gamma)$ 为 $H_a(k)$,

$$\text{则} \quad H_a(k) = \begin{bmatrix} -A^T & -C^T C \\ 0 & A \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} -C^T D \\ B \end{bmatrix} (I - k^2 D^T D)^{-1} \begin{bmatrix} B^T & D^T C \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

并有

$$1/\|T(s)\|_\infty = \inf\{k > 0, H_a(k) \text{ 在虚轴上有特征值}\}. \quad (2.6)$$

关于 $H_a(k)$ 的特征值轨迹, 有以下特性(参见算例):

1) $H_a(k)$ 的特征值关于虚, 实轴对称.

2) 当 $k = 0$ 时, $H_a(k)$ 的特征值为 $\pm A$ 的特征值.

3) 当 k 逐渐增大时, 必有一对特征值分别从左和右靠近虚轴(假设 $\|T(s)\|_\infty > \bar{\sigma}[D]$). 当 $k < 1/\|T(s)\|_\infty$ 时, $H_a(k)$ 在虚轴上没有特征值, 当 $k = 1/\|T(s)\|_\infty$ 时, 特征值首次与虚轴相遇.

4) 当 $1/\|T(s)\|_\infty \leq k < 1/\bar{\sigma}[D]$ 时, $H_a(k)$ 在虚轴上总有特征值(这条性质有助于两分法求 $\|T(s)\|_\infty$).

从第 3 条性质可知, 特征值靠近虚轴的速度越慢, 首次到达虚轴的 k (记为 k_0) 就越大, 相应 $\|T(s)\|_\infty$ 就越小. 通过极大化 k_0 , 就能等效地极小化 $\|T(s)\|_\infty$. 这样可得等效的 H_∞ -优化问题.

3 等价的 H_∞ -优化问题

设带可变参数的真, 有理传递函数为 $T(s, p)$, $p = [p_1, p_2, \dots, p_q]'$, $p \in Q$, Q 为 R^q 空间中的子集, 则一般参数的 H_∞ -优化问题为

$$\inf_{p \in Q} \|T(s, p)\|_{\infty}, \quad \text{s. t. } T(s, p) \text{ 稳定.} \quad (3.1)$$

设 $T(s, p)$ 的最小状态空间实现为: $T(s, p) = C(p)[sI - A(p)]^{-1}B(p) + D(p)$, 记 $H_a(k, p)$ 为

$$H_a(k, p) = \begin{bmatrix} -A^T(p) & -C^T(p)C(p) \\ 0 & A(p) \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} -C^T(p)D(p) \\ B(p) \end{bmatrix} \cdot [I - k^2 D^T(p)D(p)]^{-1} [B(p)D^T(p)C(p)]. \quad (3.2)$$

定义 3.1 $\rho_0(p) := \min\{k > 0, H_a(k, p) \text{ 在虚轴上有特征值}\}$.

为了便于数学分析, 上式等效于

$$\rho_0(p) = \min\{k > 0, \text{存在 } i \text{ 使 } \operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = 0\}. \quad (3.3)$$

其中 $\operatorname{Re}\lambda_i$ 表示第 i 个特征值的实部.

显然, $\rho_0(p) = 1/\|T(s, p)\|_{\infty}$. 这样, 优化问题(3.1) 等效为

$$\begin{aligned} \sup\{\rho_0(p) = \min\{k > 0, \text{存在 } i \text{ 使 } \operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = 0\}\}, \\ \text{s. t. } A(p) \text{ 的特征值都具有负实部}, p \in Q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由于满足 $\operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = 0$ 的 k 有无穷多, 因此难以求得 $d\rho_0(p)/dp$, 为此, 定义 $\rho(\varepsilon, p)$ 为

定义 3.2 对于给定的某一小正数 ε , 定义 $\rho(\varepsilon, p)$ 为

$$\rho(\varepsilon, p) := \min\{k > 0, \text{存在 } i \text{ 使 } \operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = -\varepsilon\}. \quad (3.5)$$

直观上, $\rho(\varepsilon, p)$ 解释为 $H_a(k, p)$ 的特征值首次与 $-\varepsilon + j\omega$ 轴相交时的 k 值, 见图 2.

由特征轨迹的连续性和 $H_a(k, p)$ 特征值的对称性可知, $H_a(k, p)$ 左半复平面的特征轨迹必须先与 $-\varepsilon + j\omega$ 轴相交, 然后才与 $j\omega$ 轴相关, 即: $\rho(\varepsilon, p) < \rho_0(p)$, 且易知 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, p) = \rho_0(p) = 1/\|T(s, p)\|_{\infty}$.

由特征轨迹的性质可知, 满足 $\operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = -\varepsilon$ 的 k 的个数有限, 即, 由 $\operatorname{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = -\varepsilon$ 的隐函数关系可决定有限个 k 关于 p 的函数, $k_1(p), k_2(p), \dots, k_N(p)$, 每个函数关于 p 的导数也能求出. 这样 $d\rho(\varepsilon, p)/dp$ 就能求出. 下节将利用隐函数的性质求

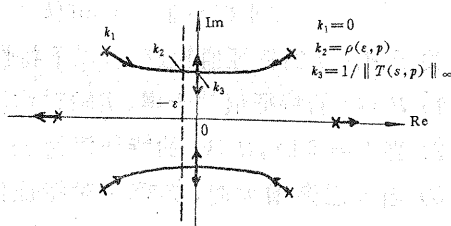


图 2 $H_a(k, p)$ 的特征轨迹与 $\rho(\varepsilon, p)$ 和 $\|T(s, p)\|_{\infty}$

$d\rho(\varepsilon, p)/dp$. 至此, 我们得到了可用梯度方法求解的等效的 H_{∞} - 优化问题:

$$\sup\{J = \rho(\varepsilon, p), p \in Q\}, \quad \text{s. t. } A(p) \text{ 稳定.} \quad (3.6)$$

当 ε 足够小时, $\rho(\varepsilon, p)$ 的极大化等效于 $\|T(s, p)\|_{\infty}$ 的极小化.

4 $\rho(\varepsilon, p)$ 的可微性与梯度方法

设 $A(p), B(p), C(p)$ 和 $D(p)$ 中的每个元素都关于 p 连续可微, 那么, 当 $k > 1/\bar{\sigma}[D(p)]$ 时, $H_a(k, p)$ 中的每个元素也是关于 p 和 k 的连续可微的函数, 见(3.2) 式.

对于 $H_a(k, p)$ 的第 i 个特征值 λ_i , 如果 λ_i 是单根, 则 $\partial\lambda_i/\partial k$ 和 $\partial\lambda_i/\partial p$ 都存在. 且有 $\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_i}{\partial p}$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \right), \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_i}{\partial k} = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} \right).$$

定理 4.1 对于给定的 p_0 , 记 $k_0 = \rho(\varepsilon, p_0)$, 则由定义 3.2 可知, 存在 i 使 $\operatorname{Re} \lambda_i[H_a(k_0, p_0)] = -\varepsilon$. 如果以下条件成立:

1) $H_a(k_0, p_0)$ 在正的 $-\varepsilon + j\omega$ 轴 ($\omega \geq 0$) 上只有一个特征值, (包括重数). 记此特征值所在的特征轨迹为第 1 条.

$$2) \quad \left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)]}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}} \neq 0.$$

则在 $p = p_0$ 处, $d\rho(\varepsilon, p)/dp$ 存在, 且,

$$\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)]}{\partial p} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)]}{\partial k} \right) \bigg|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}}. \quad (4.1)$$

证 简记 $\lambda_1[H_a(k, p)]$ 为 λ_1 . 注意到, $H_a(k, p)$ 是关于 k 和 p 的连续可微函数. 由条件

1) 可知, λ_1 是 $H_a(k_0, p_0)$ 的单根, 因此, 在 $k = k_0, p = p_0$ 处, $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k}$ 和 $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p}$ 都存在.

当 $k = k_0$ 时, $\operatorname{Re} \lambda_1 = -\varepsilon$. 由于 $H_a(k, p)$ 的特征值关于虚轴对称, 所以当 $k < k_0$ 时, 所有左半复平面的特征值的实部都小于 $-\varepsilon$, 加上条件 2) 可知, $\left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}} > 0$, 即, 对于足够

小的 $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k_0 - \varepsilon, p_0)] < -\varepsilon$, $\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k_0 + \varepsilon, p_0)] > -\varepsilon$.

因此, 当 p 在 p_0 的某个邻域内变化时, 第一条轨迹仍与 $-\varepsilon + j\omega$ 轴相交, 由于 $H_a(k_0, p_0)$ 在正的 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上只有一个特征值, 再由连续性可知, 在 p_0 的某一邻域内, 以最小 k 与 $-\varepsilon + j\omega$ 轴相交的仍然是第 1 条轨迹, 且仍在 k_0 附近相交. 即, $\rho(\varepsilon, p) = k$ 满足 $\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)] = -\varepsilon$, 或等效地,

$$\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(\rho(\varepsilon, p), p)] = -\varepsilon, \rho(\varepsilon, p) \text{ 在 } k_0 \text{ 附近}. \quad (4.2)$$

注明在 k_0 附近是因为第 1 条轨迹可能多次与 $-\varepsilon + j\omega$ 轴相交.

通过 (4.2) 式, $\rho(\varepsilon, p)$ 可由 p 唯一地确定. 或者说, (4.2) 式表示了 p_0 的某一邻域内, $\rho(\varepsilon, p)$ 与 p 的隐函数关系.

由于 λ_1 是单根, 所以 $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k}$ 都存在, 且

$$\sum_{i=1}^q \left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_i}{\partial p_i} \right|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}} \cdot \Delta p_i + \left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}} \cdot \Delta \rho(\varepsilon, p) = 0.$$

由条件 2) $\left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}} \neq 0$ 可知: 当 $\Delta p_i \rightarrow 0$ 时, $\Delta \rho(\varepsilon, p) \rightarrow 0$, 即 $\rho(\varepsilon, p)$ 是连续的.

进一步,

$$\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp_i} \right|_{p=p_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p_i} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \bigg|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}},$$

即

$$\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \bigg|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}}.$$

证毕.

当 ε 很小时,如果在 $k_0 = \rho(\varepsilon, p_0)$ 处, $H_a(k_0, p_0)$ 在正的 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上有两个以上的特征值,一般说来,每个特征值关于 k 和 p 的偏导数是不同的,因此,在这种情况下, $\rho(\varepsilon, p)$ 在 p_0 处是不可微的. 由第 2 节,这种情况等效于 $\bar{\sigma}[T(j\omega, p_0)]$ 在 $\omega \in [0, \infty)$ 范围内有两个以上近似等高(由于 $\varepsilon \neq 0$) 的最大峰值.

要求得 $\frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp}$, 必须先求得 $\frac{\partial \lambda_1}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial \lambda_1}{\partial k}$. 设 $H_a(k, p)$ 对应于第 1 个特征值的左、右特征向量分别是 t^T 和 v , 并且 $t^T v = 1$, 则

$$H_a(k, p)v = \lambda_1 v, \quad \frac{\partial H_a(k, p)}{\partial k} v + H_a(k, p) \frac{\partial v}{\partial k} = \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial k} \cdot v.$$

两边同时左乘 t^T , 注意到 $t^T v = 1$ 以及 $t^T H_a(k, p) = \lambda_1 t^T$, 因而, $\frac{\partial \lambda_1}{\partial k} = t^T \frac{\partial H(k, p)}{\partial k} v$, 类似地, $\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_i} = t^T \frac{\partial H_a(k, p)}{\partial p_i} v$.

要求得 $\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0}$, 必须先求出 $\rho(\varepsilon, p_0)$, 这可用两分法实现, 参见第八节算法部分.

以下是求 $\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0}$ 的一般算法:

1) 对于给定的 p_0 , 求 $\rho(\varepsilon, p_0)$ 和 $H_a(k_0 = \rho(\varepsilon, p_0), p_0)$ 在 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上的特征值 λ_1 . (如果在正向 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上的特征值的个数大于 1, 则认为 $\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0}$ 不存在).

2) 求 $H_a(k_0, p_0)$ 对应于 λ_1 的左、右特征向量 t^T 和 v , $t^T v = 1$.

$$3) \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} = \operatorname{Re} \left[t^T \frac{\partial H_a(k, p)}{\partial k} v \right], \quad \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p_i} = \operatorname{Re} \left[t^T \frac{\partial H_a(k, p)}{\partial p_i} v \right],$$

$$\left. \frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp} \right|_{p=p_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial p} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \Big|_{\substack{k=k_0 \\ p=p_0}}.$$

至此, $\frac{d\rho(\varepsilon, p)}{dp}$ 已经求得, 那么可用梯度法使 $\rho(\varepsilon, p)$ 极大, 从而使 $\|T(s, p)\|_\infty$ 极小.

5 问题的描述

5.1 结构式不确定系统

此类系统的开环状态空间描述为

$$\dot{x} = (A + G\Delta H)x + Bu. \quad (5.1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, A, B, G, H$ 为常数矩阵, Δ 为不确定矩阵, 具有块对角结构;

$$\Delta = \text{block diag}[\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N], \quad \Delta_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}, \quad \bar{\sigma}[\Delta_i] \leq \gamma, \quad i \in [1, N].$$

经状态反馈 $u = Fx$, 得闭环系统:

$$\dot{x} = (A + BF + G\Delta H)x. \quad (5.2)$$

以下定理给出了以上闭环系统鲁棒稳定的充分条件:

定理 5.1 系统(5.2)鲁棒稳定的充分条件是, $A + BF$ 稳定, 且

$$\inf_{D \in \Omega_1} \|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_\infty < 1/\gamma. \quad (5.3)$$

其中

$$\Omega_1 = \{D, D = \text{block diag}[d_1 I_{r_1}, d_2 I_{r_2}, \dots, d_N I_{r_N}], d_i > 0\}.$$

证 由[6]的结果易知, (5.2) 鲁棒稳定的充分条件是

$$\|H(sI - A - BF)^{-1}G\|_\infty < 1/\gamma. \quad (5.4)$$

注意到 Δ 和 D 的对角结构, 可知, 对任何 $D \in \Omega_1$, 有 $GD^{-1}\Delta DH = G\Delta H$, 令 $G_1 = GD^{-1}$, $H_1 = HD$, 那么, 只要存在 $D \in \Omega_1$ 使 $\|H_1(sI - A - BF)^{-1}G_1\|_\infty < 1/\gamma$, 系统(5.2) 就鲁棒稳定, 即, 如果(5.3) 成立, 系统(5.2) 就鲁棒稳定. 证毕.

这样, 可得鲁棒设计问题如下:

$$\inf \|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_\infty, \quad (5.5)$$

$$\text{s. t. } A + BF \text{ 稳定, } D \in \Omega_1.$$

以上优化问题包括 D 和 F 两个被优化参数. 如果 D 为不变, 可用[8]的方法进行优化. 对这种优化问题, 已有文献指出^[9], 当目标函数趋向于最小值时, 往往会产生高增益反馈和远离虚轴的极点, 为此, 本文考虑更有实际意义的如下优化问题:

$$\inf \|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_\infty, \quad (5.6)$$

$$\text{s. t. } V^{-1}(A + BF)V = A_1, \quad D \in \Omega_1. \quad (5.7)$$

其中, $A_1 = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \dots, \lambda_n]$. $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_i \pm j\beta_i, \dots, \lambda_n$ 是所期望的闭环特征值. (5.7) 式表示了极点配置的约束条件. 因此, 以上优化问题就是在极点配置的条件下, 对结构式不确定系统进行鲁棒设计. 这一优化问题是用已有的 H_∞ -优化方法所不能处理的.

5.2 参数不确定系统

此类不确定系统被描述为

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^N k_i E_i)x + Bu. \quad (5.8)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, A, B, E_i, i \in [1, N]$ 为已知实数矩阵, k_i 为不确定参数, $|k_i| \leq \gamma, i \in [1, N]$.

状态反馈下的闭环系统为

$$\dot{x} = (A + BF + \sum_{i=1}^N k_i E_i)x. \quad (5.9)$$

为了得到较为不保守的鲁棒判据, 并且便于鲁棒设计, [10] 提出了如下转换方法.

设 E_i 的秩为 r_i , 则可将 E_i 分解为, $E_i = G_i H_i, G_i, H_i^T \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$. 构造 $G = [G_1, G_2, \dots, G_N]$, $H = [H_1^T, H_2^T, \dots, H_N^T]^T$, 令 $\Delta = \text{block diag}[k_1 I_{r_1}, \dots, k_2 I_{r_2}, \dots, k_N I_{r_N}]$, 则有, $\sum_{i=1}^N k_i E_i = G\Delta H$, $\bar{\sigma}[\Delta] \leq \gamma$.

这样, 我们将参数不确定性转换为一种特殊的结构式不确定性. 注意到 Δ 的特殊对角结构, 若令 $q = \sum_{i=1}^N r_i, D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_q]$, 则 $GD^{-1}\Delta DH = G\Delta H = \sum_{i=1}^N k_i E_i$, 因此利用定理

5.1 易得如下推论.

推论 5.1 系统(5.9) 鲁棒稳定的充分条件是 $A + BF$ 稳定, 且

$$\inf_{D \in \Omega_2} \|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_{\infty} < 1/\gamma.$$

(5.10)

其中 $\Omega_2 = \{D, D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_q], d_i > 0\}$. 因此, 参数不确定系统的鲁棒设计也可归结到(5.6)式的优化问题.

6 无约束的优化问题的求解

记 $T(s, F, D) = DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}$. 将(3.2)式中的 $A(p), B(p), C(p)$ 和 $D(p)$ 分别用 $A + BF, GD^{-1}, DH$ 和 0 代入, 可得 Hamilton 矩阵 $H_a(k, F, D)$ 为

$$H_a(k, F, D) = \begin{bmatrix} -(A + BF)^T & -H^T D^2 H \\ k^2 GD^{-2} G^T & A + BF \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

类似地, 可将 $\rho(\varepsilon, F, D)$ 定义为

$$\rho(\varepsilon, F, D) := \min\{k > 0, \text{存在 } i \text{ 使 } \text{Re}\lambda_i[H_a(k, F, D)] = -\varepsilon\} \quad (6.2)$$

以及与(5.6)等效的优化问题(参见第3节):

$$\sup\{J = \rho(\varepsilon, F, D)\}, \quad \text{s. t. } V^{-1}(A + BF)V = A_1, \quad D \in \Omega_1. \quad (6.3)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\rho(\varepsilon, F, D) \rightarrow 1/\|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_{\infty}$. 本节先给出 $\partial J/\partial F$ 和 $\partial J/\partial D$ 的表达式, 暂不考虑极点配置的约束.

对于已知的 F, D , 用两分法求得 $\rho(\varepsilon, F, D)$, 令 $k_0 = \rho(\varepsilon, F, D)$. 设 $H(k_0, F, D)$ 在正向 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上只有一个特征值 λ_1 , 相应的左、右特征向量分别为 t^T 和 v , $t^T v = 1$, 将 t^T 和 v 分块为, $t^T = [t_1^T, t_2^T], v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, t_1, t_2, v_1, v_2 \in R^n$, 利用第4节的方法得,

1) 对于 F 中第 l 行第 j 列上的元素 F_{lj} ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re}\lambda_1}{\partial F_{lj}} &= \text{Re}\left\{[t_1^T t_2^T] \begin{bmatrix} -\frac{\partial(BF)^T}{\partial F_{lj}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(BF)}{\partial F_{lj}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \text{Re}\left[t_2^T B \frac{\partial F}{\partial F_{lj}} v_2 - t_1^T \frac{\partial F^T}{\partial F_{lj}} B^T v_1\right] \\ &= \text{tr}[\text{Re}(v_2 t_2^T - t_1 v_1^T) B \frac{\partial F}{\partial F_{lj}}]. \end{aligned}$$

若记

$$\frac{\partial}{\partial F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial F_{11}} & \frac{\partial}{\partial F_{12}} & \dots & \frac{\partial}{\partial F_{1n}} \\ \frac{\partial}{\partial F_{m1}} & \frac{\partial}{\partial F_{m2}} & \dots & \frac{\partial}{\partial F_{mn}} \end{bmatrix},$$

则

$$\frac{\partial \text{Re}\lambda_1}{\partial F} = [\text{Re}(v_2 t_2^T - t_1 v_1^T) B]^T. \quad (6.4)$$

2) 记 $W_j = \text{block diag}[O_{r_1}, O_{r_2}, \dots, I_{r_j}, \dots, O_{r_N}]$, 其中 O_{r_i} 表示 $r_i \times r_i$ 阶零矩阵, I_{r_j} 表示 r_j 阶单位矩阵, 则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re}\lambda_1}{\partial d_j} &= \text{Re}[t_2^T (k^2 G) (-2) d_j^{-3} W_j G^T v_1 - t_1^T H^T (2) d_j W_j H v_2] \\ &= \text{Re}\{\text{tr}[(-2k^2 G^T v_1 t_2^T G d_j^{-3} - 2H v_2 t_1^T H^T d_j) W_j]\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

3)

$$\frac{\partial \text{Re}\lambda_1}{\partial k} = \text{Re}[2k t_2^T G D^{-2} G^T v_1]. \quad (6.6)$$

由定义 4.1 可得:

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon, F, D)}{\partial F} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial F} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \Big|_{k=\rho(\varepsilon, F, D)}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon, F, D)}{\partial d_j} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial d_j} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \Big|_{k=\rho(\varepsilon, F, D)}.$$

对于无极点配置约束的鲁棒设计,可直接利用以上偏导数对 $\rho(\varepsilon, F, D)$ 进行优化,只要初值 F_0 使得 $A + BF_0$ 稳定,那么梯度方法将保证每次迭代后 $A + BF$ 稳定. 因为如果 $A + BF$ 的特征值靠近虚轴, $\rho(\varepsilon, F, D)$ 就会减小并趋向于零,这与正向梯度方向(增大 $\rho(\varepsilon, F, D)$ 的方向)相反.

7 极点配置约束的放松

类似[2]等文的方法, (5.7) 式的约束条件 $V^{-1}(A + BF)V = A_1$ 可通过引入一矩阵函数 f 得以放松.

定义 7.1 设 (A, B) 可控, A 和 A_1 无相同特征值, 则定义 $f: U \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 如下:

已知 $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 解 $AV - VA_1 = -BU$, 如果 V 非奇异, 则令 $F = UV^{-1}$.

f 的定义域 D_f 为使 V 非奇异的 U 的集合, U 在 f 下的象为 F , 即 $F = f(U)$, f 的值域为 D_f 在 f 下的象集.

已经证明([3]和[4]), f 的值域就是所有满足 (5.7) 式的 F 的集合, f 的定义域 D_f 如果非空, 必为 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 中稠的开集. 利用此性质, 就可消除约束条件 (5.7). 而将 (5.6) 中的 F 用 $f(U)$ 代替, 而 U 是自变量.

目标函数 $J = \rho(\varepsilon, F, D)$ 是 F 和 D 的函数, 约束条件消除后, J 成为 U 和 D 的函数. 记 $J = \rho(\varepsilon, F, D)$ 为 $J = J(U, D)$.

令 U_{pq} 是 U 中第 p 行第 q 列上的元素,

$$\text{记} \quad \frac{\partial J}{\partial F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial F_{11}} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial F_{1n}} \\ \frac{\partial J}{\partial F_{m1}} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial F_{mn}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial U_{pq}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial U_{pq}} & \cdots & \frac{\partial F_{1n}}{\partial U_{pq}} \\ \frac{\partial F_{m1}}{\partial U_{pq}} & \cdots & \frac{\partial F_{mn}}{\partial U_{pq}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \frac{\partial J}{\partial U_{pq}} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \cdot \frac{\partial F_{ij}}{\partial U_{pq}} \\ &= \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial U_{pq}} \right) \right] \\ &= \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T \left(\frac{\partial UV^{-1}}{\partial U_{pq}} \right) \right] \\ &= \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T \left(\frac{\partial U}{\partial U_{pq}} V^{-1} - UV^{-1} \frac{\partial V}{\partial U_{pq}} V^{-1} \right) \right] \quad (UV^{-1} = F) \\ &= \underbrace{\operatorname{tr} \left[V^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T \frac{\partial U}{\partial U_{pq}} \right]}_{Q_1} - \underbrace{\operatorname{tr} \left[V^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T F \cdot \frac{\partial V}{\partial U_{pq}} \right]}_{Q_2} \end{aligned}$$

$$= \text{rs}Q_1 \cdot \text{cs} \frac{\partial U}{\partial U_{pq}} - \text{rs}Q_2 \cdot \text{cs} \frac{\partial V}{\partial U_{pq}}.$$

由定义 7.1, V 是 $AV - VA_1 = -BU$ 的解, 等效为

$$\text{cs}V = -(I_n \otimes A - A_1^T \otimes I_n)^{-1} \cdot (I_m \otimes B) \cdot \text{cs}U.$$

因而:

$$\frac{\partial J}{\partial U_{pq}} = [\text{rs}Q_1 + \text{rs}Q_2 \cdot (I_n \otimes A - A_1^T \otimes I_n)^{-1} (I_m \otimes B)] \cdot \text{cs} \frac{\partial U}{\partial U_{pq}}.$$

令 X 是 $XA - A_1X = Q_2$ 的解, 那么

$$\text{rs}Q_2 \cdot (I_n \otimes A - A_1^T \otimes I_n)^{-1} = \text{rs}X,$$

$$\text{rs}Q_2 \cdot (I_n \otimes A - A_1^T \otimes I_n)^{-1} \cdot (I_m \otimes B) = \text{rs}(XB).$$

因此,
$$\frac{\partial J}{\partial U_{pq}} = \text{rs}(Q_1 + XB) \cdot \frac{\partial \text{cs}U}{\partial U_{pq}} = \text{tr} \left[(Q_1 + XB) \cdot \frac{\partial U}{\partial U_{pq}} \right].$$

最后可得

$$\frac{\partial J}{\partial U} = (Q_1 + XB)^T. \quad (7.1)$$

其中 X 满足:

$$XA - A_1X = Q_2, \quad (7.2)$$

$$Q_1 = V^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T; \quad Q_2 = V^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial F} \right)^T F, \quad \frac{\partial J}{\partial F} = \frac{\partial \rho(\varepsilon, F, D)}{\partial F} \quad (\text{由 (6.4)~(6.7) 给出}).$$

以上 $\frac{\partial J}{\partial U}$ 的推导方法类似[2]中各梯度的推导, 符号 $\text{cs}[\cdot]$, $\text{rs}[\cdot]$ 分别表示列展开和行展开, “ $\otimes$ ”表示 Kroneker 积, $\text{tr}[\cdot]$ 为矩阵的迹. 详细定义及有关性质参见[2].

再回到优化问题(6.3), 利用矩阵函数 f 放松了约束条件后, J 成为 U 和 D 的函数, 现在, $\frac{\partial J}{\partial U}$ 由(7.1)式给出, $\frac{\partial J}{\partial d_j}$ 由(6.5)~(6.7)给出, 所以, 可用梯度方法优化(6.3). 由于(6.3)与(5.6)等价, 这样, 就等效于用梯度方法, 在极点配置的约束条件下极小化 $\|DH(sI - A - BF)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$.

8 算法

本节给出求 $\rho(\varepsilon, p)$ 的通用算法和求解优化问题(6.3)的梯度算法.

A) 用两分法求 $\rho(\varepsilon, p)$.

已知参数 p , 可求出 $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ 和 $D(p)$ 并构成 Hamilton 矩阵 $H_a(k, p)$. (见(3.2)式). 具体计算时, 要求得精确的 $\rho(\varepsilon, p)$ 或者满足 $\text{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] = -\varepsilon$ 的精确 k 需要花费大量机时, 也没有如此必要. 一定范围的误差是允许的. 取一小正数 e , $e \ll \varepsilon$, 那么较易求得满足 $-\varepsilon - e \leq \text{Re}\lambda_i[H_a(k, p)] \leq -\varepsilon + e$ 的 k . 因此, 有以下算法求 $\rho(\varepsilon, p)$.

设 $H_a(k, p)$ 的特征值按如下规律排序:

$$\text{Re}\lambda_n \leq \text{Re}\lambda_{n-1} \leq \dots \leq \text{Re}\lambda_1 \leq 0 \leq \text{Re}\lambda_{n+1} \leq \dots \leq \text{Re}\lambda_{2n}.$$

Step 1 选取初值 k_0 , 作为 $\rho(\varepsilon, p)$ 的最初估计值.

Step 2 a) 如果 $\text{Re}\lambda_1[H_a(k_0, p)] < -\varepsilon - e$, 则用 $2k_0$ 置换 k_0 , 重复这一步的判别.

b) 如果 $\text{Re}\lambda_1[H_a(k_0, p)] > -\varepsilon + e$, 转至 Step 3).

c) 转至 Step 6).

Step 3 令 $k_1 = 0, k_2 = k_0$, 显然, $k_1 < \rho(\varepsilon, p) < k_2$.

Step 4 令 $k = (k_1 + k_2)/2$.

Step 5 a) 如果 $\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)] < -\varepsilon - e$, 则令 $k_1 = k$, 转 Step 4).

b) 如果 $\operatorname{Re} \lambda_1[H_a(k, p)] > -\varepsilon + e$, 则令 $k_2 = k$, 转 Step 4).

Step 6 k 即为 $\rho(\varepsilon, p)$ 的估计值. 另外, 记满足 $-\varepsilon - e \leq \operatorname{Re} \lambda_i[H_a(k, p)] \leq -\varepsilon + e$, $I_m \lambda_i[H_a(k, p)] \geq 0$ 的特征值的个数为 N . (N 被认为是 $H_a(k, p)$ 在正 $-\varepsilon + j\omega$ 轴上的特征值的个数).

B) 梯度算法.

Step 1 选择 U_0, D_0 , 令 $j = 0$.

Step 2 解 $AV - VA_1 = -BU_j$, 令 $F_j = U_j V^{-1}$, 用以上算法求 $\rho(\varepsilon, F_j, D_j)$ 及 N , 如果 $N \geq 2$, 则认为 $\frac{\partial J}{\partial U}$ 不存在. 转 Step 5). 如果 $N = 1$, 执行 Step 3).

Step 3 令 $k_0 = \rho(\varepsilon, F_j, D_j)$, 求 $H_a(k_0, F_j, D_j)$ 关于 λ_1 的左、右特征向量, t^T 和 v , $t^T v = 1$, 由 (6.4) ~ (6.7) 求 $\frac{\partial \rho(\varepsilon, F, D)}{\partial F}$ 和 $\frac{\partial \rho(\varepsilon, F, D)}{\partial D}$, 再由 (7.1) 式求 $\frac{\partial J}{\partial U}$, ($J = \rho(\varepsilon, F, D)$)

Step 4 一维搜索 h , 使 $J(U_j + h \frac{\partial J}{\partial U}, D_j + h \frac{\partial J}{\partial D})$ 最大. 如果 $J(U_j + h \frac{\partial J}{\partial U}, D_j + h \frac{\partial J}{\partial D}) - J(U_j, D_j) \leq e_1$ (预先给定小正数), 则转至 Step 5), 否则, 令 $U_{j+1} = U_j + h \frac{\partial J}{\partial U}, D_{j+1} = D_j + h \frac{\partial J}{\partial D}$ 用 $j+1$ 替代 j , 转至 Step 2).

Step 5 输出终值 $U^*, F^*, J^* = \rho(\varepsilon, F^*, D^*)$ 和 D^* . 结束.

9 算 例

考虑优化问题 (5.6). 其中, 系统阶次为 3, 各矩阵分别是

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad G = H = I_3.$$

D 具有结构 $D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, d_3]$.

取 $\varepsilon = 0.1, e = 0.02$. 令初值 $U_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_0 = \operatorname{diag}[1, 1, 1]$, 梯度算法的运行结果如下:

迭代次数	$J = \rho(\varepsilon, F, D)$	$\ \frac{\partial J}{\partial U} \ ^2 + \ \frac{\partial J}{\partial D} \ ^2$
0	0.12503	2.93462
1	1.38477	2.05350
2	1.66309	0.34381
3	1.70117	0.15242
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	1.75391	0

可以看出,梯度算法的效果非常好,并且收敛于驻点,说明梯度方向是正确的,也说明本文方法的正确性和有效性. 以下是输出终值:

$$F^* = \begin{bmatrix} -1.04375 & -2.31613 & -2.75268 \\ -4.03186 & -1.24731 & 1.11382 \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} -0.23258 & 1.26185 \\ 1.95742 & 0.83495 \\ 0.91697 & 0.84026 \end{bmatrix},$$

$$d^* = \text{diag}[0.63735, 1.28094, 1.01269].$$

作为对照,有

$$F_0 = \begin{bmatrix} -59.00947 & 15.85990 & -15.28790 \\ -45.00753 & 11.28791 & -8.43030 \end{bmatrix}.$$

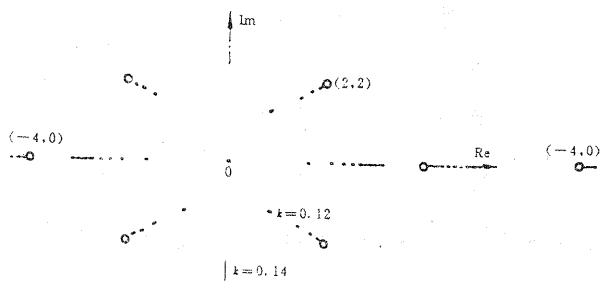


图3 $H_0(k, F_0, D_0)$ 的特征值轨迹

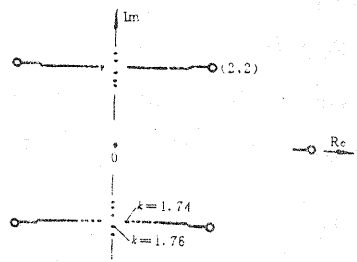


图4 $H_0(k, F^*, D^*)$ 的特征值轨迹

最后, 作为验证, $1/\|D^*H(sI - A - BF^*)G(D^*)^{-1}\|_\infty = 1.75569$ 略大于 $J^* = \rho(e, F^*, D^*) = 1.75391$, 说明 $\|T(s, F, D)\|_\infty$ 的极小化可通过 $\rho(e, F, D)$ 的极大化来实现. 为展示本文方法的优化机理, 以下绘出优化前后 $H_0(k, F, D)$ 的特征轨迹和 $\bar{\sigma}[T(j\omega, F, D)]$ 关于 ω 的幅频特性, 见图3, 图4和图5.

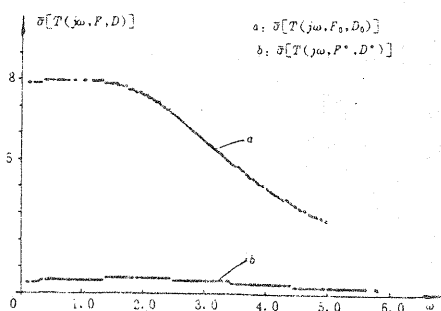


图5 幅频特性比较

说明 在图3和图4中, 邻近两点之间的 k 的差值是一样的, 点越稀, 特征值走得越快, 到达虚轴的 k 越小. 因而 $\|T(s, F, D)\|_\infty$ 越大, 反之, 点越密, $\|T(s, F, D)\|_\infty$ 越小. 为了使虚、实轴上的特征轨迹易于辨认, 图中没有画出全部的虚实轴.

10 结 语

本文提出的新方法能处理以前的 H_∞ -优化方法所不能解决的问题. 算法并不复杂, 优化效果也很明显. 不难发现, 本文方法还可直接用于对输出反馈系统和带观测器的系统进行 H_∞ -优化设计, 也可用于优化 PID 参数. 另外, 还可将 H_∞ -范数与 H_2 -范数加权, 构成 $J = \|T_1(s, p)\|_\infty + \|T_2(s, p)\|_2$ 形式的目标函数.

参 考 文 献

- [1] Doyle, J. C. et al. . State Space Solution to Standard H_2 and H_∞ -Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr. , AC-34(1989):831—847
- [2] 胡庭姝, 施颂椒, 张钟俊. 时域鲁棒设计的新方法. 自动化学报, 1994, 20: 129—138
- [3] Hu, T. S. and Shi, S. J. . The Set of Feedback Matrices that Assign the Poles of a System. Progress of System and Control Theory (MINS-89), 19, 2: 129—135
- [4] 胡庭姝, 施颂椒, 张钟俊. 一类关于鲁棒性和敏感性的泛函的优化. 自动化学报, 1991, 17: 592—596
- [5] 张钟俊, 施颂椒, 胡庭姝. 通过传递函数的状态空间实现求 H_∞ -范数. 自动化学报, 1991, 17: 215—219
- [6] Hinrichsen, D. , et al. Stability Radius for Structured Perturbations and the Algebraic Riccati Equations. Systems and Control Letters, 1986, 8: 105—113
- [7] Packard, A. and Doyle, J. C. . The Complex Structured Singular Value. Automatica, 1993, 29: 71—109
- [8] Hinrichsen, D. et al. . Riccati Equation Approach to Maximizing the Complex Stability radius by State Feedback. Int. J. Control, 1990, 52: 769—794
- [9] Scherer, C. . H_∞ -Control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High Gain Occurrence. Systems and Control Letters, 1989, 12: 383—391
- [10] 胡庭姝, 施颂椒. 状态矩阵中含不确定参数的系统的鲁棒性分析. 控制理论与应用, 1992, 9: 533—537

A New Approach to Optimize the H_∞ -Norm and Robust Design

HU Tingshu

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: This paper will provide a gradient method for H_∞ -optimization. This new method can be flexibly used for a wide range of design objectives. For example, it can be used to optimize any parameter contained in the system matrices, to optimize an objective function with mixed norms and to optimize an H_∞ -norm under the constraint of pole assignment. The main idea of the gradient method is to define an objective function $\rho(\varepsilon, p)$ through a Hamilton matrix that is closely related to the H_∞ -norm, with the relation that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, p) = 1 / \|T(s, p)\|_\infty$, in which p can be any parameter in the system matrices. The differential $d\rho(\varepsilon, p)/dp$ is derived in the paper, so $\rho(\varepsilon, p)$ can be maximized by gradient method, thus $\|T(s, p)\|_\infty$ is minimized. This method is utilized for robust design of system with structured uncertainty under the constraint of pole assignment. Example show that the method is very effective.

Key words: H_∞ -norm; the gradient method; Hamiltonian matrix; eigenvalue loci; structured uncertainty

本文作者简介

胡庭姝 1966年生. 分别于1985年, 1988年, 1990年于上海交通大学自动控制系获学士、硕士和博士学位. 1993年提升为副教授, 主要研究方向是鲁棒控制和 H_∞ -优化理论, 实参数不确定系统的鲁棒控制.