第12卷第3期
1995年6月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 12, No. 3
Jun., 1995

# 一类模糊系统模式的稳定性研究*

王意冈　王浣尘
(上海交通大学系统工程研究所·200052)

**摘要**：本文将在Takagi-Sugeno模型基础上，建立一类较实用的Fuzzy System模式，讨论该模式 连续型和离散型的稳定性，给出各自的渐近稳定充分条件，以及构造Lyapunov函数(正定矩阵)存在的条件.

**关键词**：模糊系统；稳定性；Lyapunov函数

## 1 引　　言

在社会经济系统中，存在着大量的不确定因素，大致可以分成两类，一类为随机性，一类为模糊性. 当研究社会经济系统时，就更需要用Fuzzy System[1,2]. 以Takagi-Sugeno模型[3]，改造成为适应社会系统所需要的模式，称为模糊系统模式(Fuzzy System Model, FSM)，并对其进行研究，解的特性见[4]，在此着重讨论FSM的渐近稳定条件，即充分条件和构造Lyapunov函数时需的正定矩阵$P$存在的必要条件. 使得对复杂的，时变的Fuzzy System的稳定性研究转变成对每个Fuzzy蕴函，较简单的，线性常定子系统的稳定性研究.

## 2 FSM的形式

在Takagi-Sugeno模型[5]中，着重考虑离散型的高阶单量Fuzzy系统，这一模型不能适应社会经济系统的研究需要. 在此，先给出连续型，然后给出离散型的FSM.

### 2.1 连续型FSM

设模糊系统为，$n$个状态变量$x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$，$m$个输出变量$y_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$，$r$个输入变量$u_i(t)(i=1,2,\cdots,r)$.

$L^i$:　If　$x_1(t)$　is　$X_1^i$　and　…　and　$x_n(t)$　is　$X_n^i$

　and　$u_1(t)$　is　$U_1^i$　and　…　and　$u_r(t)$　is　$U_r^i$

$$\text{Then}\quad \dot{x}_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^i x_j(t)+\sum_{j=1}^{r}b_{kj}^i u_j(t),\quad y_p^i(t)=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}^i x_j(t)+\sum_{j=1}^{r}d_{pj}^i u_j(t). \tag{1}$$

其中$L^i(i=1,2,\cdots,l)$—— 第$i$级的蕴函；$l$—— 模糊蕴函的数量；$\dot{x}_k^i(t)$—— 在第$i$级蕴函下，第$k$个状态变量的微分形式；$y_p^i(t)$—— 在第$i$级蕴函下，第$p$个输出变量；$x_j(t)$—— 状态变量$j=1,2,\cdots,n$；$u_j(t)$—— 输入变量$j=1,2,\cdots,r$；$a_{kj}^i$, $b_{kj}^i$, $c_{pj}^i$, $d_{pj}^i$—— 各变量前的系数，$k=1,2,\cdots,n$，$p=1,2,\cdots,m$，$i=1,2,\cdots,l$；$X_1^i, X_2^i,\cdots,X_n^i, U_1^i,\cdots,U_r^i$——Fuzzy集合，它是由一些简单的连续分段多项式构成的隶属函数.

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1993年12月9日收到. 1994年8月5日收到修改稿.

当 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_r(t)$ 给定，式(1)将确定 $\dot{x}_1^i(t),\dot{x}_2^i(t),\cdots,\dot{x}_n^i(t)$ 和 $y_1^i(t),\cdots,y_m^i(t)$，那么，最后 FSM 的状态和输出为

$$\dot{x}_k(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i\dot{x}_k^i(t)\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i,\quad y_p(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i y_p^i(t)\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i. \tag{2}$$

其中
$$\omega_i=\prod_{j=1}^{n}X_j^i(x_j(t))\times\prod_{j=1}^{r}U_j^i(u_j(t)).$$

$\omega_i$ 称为 $L^i$ 的权重因子，由于 $X_j^i,U_j^i$ 分别是 $x_j^i(t),u_j^i(t)$ 的隶属函数构成的 Fuzzy 集合，显然
$$\sum_{i=1}^{l}\omega_i>0.$$

现将式(1)和式(2)联立可得到

$$\begin{cases}\dot{x}_k(t)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\omega_i a_{kj}^i x_j(t)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r}\omega_i b_{kj}^i u_j(t)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i,\\ y_p(t)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\omega_i c_{pj}^i x_j(t)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r}\omega_i d_{pj}^i u_j(t))\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i.\end{cases} \tag{3}$$

FSM 的矩阵形式：

L：If $\boldsymbol{x}(t)$ is $X^i$ and $u(t)$ is $U^i$

Then
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i A_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{l}\omega_i B_i\boldsymbol{u}(t)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i,\\ \boldsymbol{y}(t)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i C_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{l}\omega_i D_i\boldsymbol{u}(t)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i.\end{cases} \tag{4}$$

其中：
$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm T},\quad \boldsymbol{u}(t)=[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_r(t)]^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t)]^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{X}^i=[X_1^i,X_2^i,\cdots,X_n^i]^{\mathrm T},\quad \boldsymbol{U}^i=[U_1^i,U_2^i,\cdots,U_r^i]^{\mathrm T},$$
$$A_i=\begin{bmatrix}a_{11}^i&\cdots&a_{1n}^i\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}^i&\cdots&a_{nn}^i\end{bmatrix},\quad B_i=\begin{bmatrix}b_{11}^i&\cdots&b_{1r}^i\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ b_{n1}^i&\cdots&b_{nr}^i\end{bmatrix},$$
$$C_i=\begin{bmatrix}c_{11}^i&\cdots&c_{1n}^i\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ c_{m1}^i&\cdots&c_{mn}^i\end{bmatrix},\quad D_i=\begin{bmatrix}d_{11}^i&\cdots&d_{1r}^i\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ d_{m1}^i&\cdots&d_{mr}^i\end{bmatrix}.$$

## 2.2 离散型 FSM

设模糊系统为 $n$ 个状态变量 $x_i(k)(i=1,2,\cdots,n)$，$m$ 个输出变量 $y_i(k)(i=1,2,\cdots,m)$，$r$ 个输入变量 $u_i(k)(i=1,2,\cdots,r)$ 的矩阵形式：

L：If $\boldsymbol{x}(k)$ is $\boldsymbol{X}^i$ and $\boldsymbol{u}(k)$ is $U^i$

Then
$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i A_i\boldsymbol{x}(k)+\sum_{i=1}^{l}\omega_i B_i\boldsymbol{u}(k)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i,\\ \boldsymbol{y}(k+1)=\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i C_i\boldsymbol{x}(k)+\sum_{i=1}^{l}\omega_i D_i\boldsymbol{u}(k)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i.\end{cases} \tag{5}$$

其中各式的含义同式(4)相同，注意式(4)中 $t$ 是为连续变量，式(5)中 $k$ 是 $0,1,2,\cdots$ 的变化，即式(5)是差分形式.

## 3 连续型 FSM 稳定性分析

为讨论方便，研究式(4) 的齐次方程式：

$$\mathrm{L}:\quad \text{If}\quad x(t)\quad \text{is}\quad X^i\quad \text{Then}\quad \dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i A_i x(t)/\sum_{i=1}^{l}\omega_i. \tag{6}$$

**引理 3.1**　设 $A,B$ 为 $N$ 阶负定矩阵，即 $A,B\in\mathrm{R}^{n\times n}$，$\alpha,\beta\geqslant 0$，并且 $\alpha+\beta>0$，则 $\alpha A+\beta B$ 为负定矩阵.

证　$\forall\, x$ 为 $n$ 阶向量，$x\neq 0$，

$$x^{\mathrm{T}}(\alpha A+\beta B)x=\alpha x^{\mathrm{T}}Ax+\beta x^{\mathrm{T}}Bx. \tag{7}$$

因为 $\alpha+\beta>0$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，所以必有一系数大于零，不妨设 $\alpha\geqslant 0$，式(7) 由条件 $A,B$ 为负定矩阵，是小于零的. 故 $\alpha A+\beta B$ 为负定矩阵.　　证毕.

**定理 3.1**　对于连续型 FSM，式(6) 如果存在正定矩阵 $P$，使得 $A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i$ 为负定矩阵，$i=1,2,\cdots,l$，则 FSM 的平衡状态是渐近稳定.

证　设 $V(x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$ 为标量函数，其中 $P$ 是正定矩阵，下面将证明 $V(x(t))$ 为 Lyapunov 函数.

因为 $P$ 是正定矩阵，所以

Ⅰ) $V(0)=0$.　Ⅱ) 当 $x(t)\neq 0$，$V(x(t))>0$.　Ⅲ) 当 $\|x(t)\|\to\infty$，$V(x(t))\to\infty$.

其中 $\|\cdot\|$ 为向量范数.

设

$$\sigma=\sum_{i=1}^{l}\omega_i,$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=\dot{x}^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}P\dot{x}\\&=\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_iA_ix(t)/\sum_{i=1}^{l}\omega_i\Big]^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_iA_ix(t)/\sum_{i=1}^{l}\omega_i\Big]\\&=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{l}\omega_ix(t)[A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i]x(t).\end{aligned} \tag{8}$$

因为 $\sigma=\sum_{i=1}^{l}\omega_i>0$，由引理 3.1 和条件 $A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i$ 为负定矩阵，所以式(8) 小于零，即

Ⅳ) $\dot{V}(x(t))<0$.

故 $V(x(t))=x^{\mathrm{T}}Px$ 为 Lyapunov 函数，那么式(6) 的 FSM 是渐近稳定.

值得注意，当 $i$ 固定后，构成的 FSM 子系统 $\mathrm{L}^i$，

$$\mathrm{L}^i:\quad \text{If}\quad x(t)\quad \text{is}\quad X^i\quad \text{and}\quad u(t)\quad \text{is}\quad U^i\quad \text{Then}\quad \dot{x}^i(t)=A_ix(t) \tag{9}$$

即使子系统 $\mathrm{L}^i$ 渐近稳定，也不能保证 FSM 的全系统 L，式(6) 渐近稳定.

**例 3.1**　取 $X^1,X^2$ 均为值是 1 的隶属函数，分析 FSM，

$$\mathrm{L}^1:\quad \dot{x}^1(t)=A_1x(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$\mathrm{L}^2:\quad \dot{x}^2(t)=A_2x(t)=\begin{bmatrix}-1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

对于 $\mathrm{L}^1$，

$$|\lambda I-A_1|=\lambda^2+\lambda+2.$$

由 Hurwitz 判据，$L^1$ 是渐近稳定.

对于 $L^2$，
$$|\lambda I - A_2| = \lambda^2 + \lambda + 2.$$
同理，$L^2$ 是渐近稳定.

对于 L，
$$\sigma = \sum_{i=1}^{2}\omega_i = 1 + 1 = 2,\quad \omega_i = 1,\quad i = 1,2.$$
$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \sum_{i=1}^{2}\omega_i A_i x(t)/\sigma = (A_1 + A_2)x(t)/2. \tag{12}$$
其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$，$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda - (1/4)$ 用 Hurwitz 判据，L 是非渐近稳定.

由例 3.1 说明对于 FSM 而言，当每个子系统 $L_i$ 渐近稳定并不是 FSM 渐近稳定的充分条件. 另外由定理 3.1 可知，FSM 渐近稳定的关键是找到正定矩阵 $P$，使得条件成立，这是个共同的 $P$，下面给出这样的 $P$ 存在的必要条件.

**定理 3.2** 如果存在正定矩阵 $P$，使得对每个 $i$ 的 $A_i$，$A_i$ 是非奇导，有 $A_i^TP + PA_i$ 为负定矩阵，$i = 1,2,\cdots,l$，则 $P$ 使得 $A_iA_j$ 有 $(A_iA_j)^TP + P(A_iA_j)$ 为负定矩阵，$i = 1,2,\cdots,l$，$j = 1,2,\cdots,l$.

证 由条件可知，对于 $\forall\ X \neq 0$，均有
$$X^T(A_i^TP + PA_i)X < 0, i = 1,2,\cdots,l,$$
那么
$$\forall\ X \neq 0,$$
$$X^T[(A_iA_j)^TP + P(A_iA_j)]X = (A_jX)^T(A_i^TP + PA_i)(A_jX). \tag{13}$$
令 $Y = A_jX$，当 $X \neq 0$，$|A_j| \neq 0$，则 $Y \neq 0$. 所以(13)小于零. 故定理成立. 证毕.

由定理 3.2 可知，在 FSM 中，如果存在一个 $A_iA_j$ 构成的系统不是渐近稳定，那么，共同的正定矩阵 $P$ 不存在.

**例 3.2** 研究例 3.1 的 FSM

其中
$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad A = A_1A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$
对应 $|\lambda I - A| = \lambda^2 - 6\lambda + 4$，由 Hurwitz 判据，$A$ 构成的系统非渐近稳定，由定理 3.2，可知例 3.1 的 FSM 共同的 $P$ 是不存在的.

由定理 3.1，定理 3.2 说明对于 FSM 整个系统的研究(稳定性)可以分解成对其的每一个子系统的研究，使一个对复杂时变的 Fuzzy 系统的研究转换成对每一个线性定常子系统研究.

## 4 离散型 FSM 的稳定性分析

在此研究齐次形式
$$L_i\text{:}\quad \text{If}\quad x(t)\quad \text{is}\quad X^i\quad \text{Then}\quad x(k+1) = \Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i A_i x(k)\Big]\Big/\sum_{i=1}^{l}\omega_i. \tag{14}$$

**引理 4.1** 设 $P$ 是 $n$ 阶正定矩阵，如果存在 $A$，$B$ 为 $n$ 阶矩阵，使得 $A^TPA - P$ 和 $B^TPB - P$ 为负定矩阵，则 $A^TPB + B^TPA - 2P$ 为负定矩阵.

证 $\forall\ X \neq 0$，

$$X^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}}PB + B^{\mathrm{T}}PA - 2P]X$$
$$= X^{\mathrm{T}}[-(A-B)^{\mathrm{T}}P(A-B) + A^{\mathrm{T}}PA + B^{\mathrm{T}}PB - 2P]X$$
$$= -[(A-B)X]^{\mathrm{T}}P[(A-B)X] + X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}PA - P)X + X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB - P)X. \quad (15)$$

由条件
$$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}PA - P)X < 0, \quad X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB - P)X < 0$$
和
$$-[(A-B)X]^{\mathrm{T}}P[(A-B)X] \leqslant 0$$
得出式(15)小于零.故引理成立.　　证毕.

**定理 4.1**　设 FSM 为式(14),如果存在正定矩阵 $P$,使得 $A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P$ 为负定矩阵,$i = 1,2,\cdots,l$.则 FSM 是渐近稳定.

证　设标量函数 $V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$.因为 $P$ 是正定矩阵,则

Ⅰ) $V(0) = 0$. Ⅱ)当 $x(k) \neq 0$ 时 $V(x(k)) > 0$. Ⅲ)当 $\| x(t) \| \to \infty, V(x(t)) \to \infty$

因为
$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i A^i x(k)\Big]^{\mathrm{T}} P\Big[\sum_{i=1}^{l}\omega_i A^i x(k)\Big] - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\Big\{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\omega_i\omega_j x^{\mathrm{T}}(k)A_i^{\mathrm{T}}PA_j x(k) - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i}\omega_i\omega_j x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\Big\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\omega_i\omega_j[x^{\mathrm{T}}(k)(A_i^{\mathrm{T}}PA_j - P)x(k)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{l}\omega_i^2[x^{\mathrm{T}}(k)(A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P)x(k)] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i<j}^{i}\omega_i\omega_j x^{\mathrm{T}}(k)(A_i^{\mathrm{T}}PA_j + A_j^{\mathrm{T}}PA_i - 2P)x(k).\end{aligned}$$

由条件,引理 4.1
$$\sum_{i=1}^{l}\omega_i > 0, \quad \omega_i \geqslant 0$$
得知　Ⅳ) $\Delta V(x(k)) < 0$.

故 $V(x(k))$ 是 Lyapunov 函数,即定理成立.　　证毕.

显然,定理 4.1 与定理 3.1 一致,$P$ 的存在是 FSM 渐近稳定充分条件,对于 $P$ 存在的必要条件如下.

**定理 4.2**　如果存在正定矩阵 $P$,使得 $A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P$ 为负定矩阵,$i = 1,2,\cdots,l$,则 $P$ 使得 $(A_iA_j)^{\mathrm{T}}P(A_iA_j) - P$ 为负定矩阵,$i = 1,2,\cdots,l$; $j = 1,2,\cdots,l$.

证　$\forall X \neq 0$ 向量
$$\begin{aligned}&X^{\mathrm{T}}[(A_iA_j)^{\mathrm{T}}P(A_iA_j) - P]X \\ &= (A_jX)^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}PA_i(A_jX) - X^{\mathrm{T}}PX \\ &= (A_jX)^{\mathrm{T}}[A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P](A_jX) + (A_jX)^{\mathrm{T}}P(A_jX) - X^{\mathrm{T}}PX \\ &= (A_jX)^{\mathrm{T}}[A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P](A_jX) + X^{\mathrm{T}}[A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P]X. \quad (16)\end{aligned}$$

令 $Y = A_jX$, 式(16)中第一项 $\leqslant 0$,第二项 $< 0$,故定理成立.　　证毕.

定理 4.1 和定理 4.2 与连续型的定理 3.1 和定理 3.2 具有相同的作用,将一复杂系统

研究转换成一些较简单系统的研究.

**例 4.1** 分析 FSM 的稳定性[5]

$L^1$: If $x_1(k)$ is $X_1^1$ and $x_2(k)$ is $X_2^1$

$$\text{Then}\quad \begin{bmatrix} x_1^1(k+1) \\ x_2^1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.178-0.603D & -0.588 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}; \tag{17}$$

$L^2$: If $x_1(k)$ is $X_1^2$ and $x_2(k)$ is $X_2^2$

$$\text{Then}\quad \begin{bmatrix} x_1^2(k+1) \\ x_2^2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.256-1.120D & -0.361 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

其中

$$x_{1,2}^1 = \begin{cases} 0, & x_{1,2} < 0.3, \\ -\dfrac{1}{0.3}(x_{1,2}-0.6), & 0.3 \leqslant x_{1,2} \leqslant 0.6, \\ 1, & x_{1,2} > 0.6, \end{cases}$$

$$x_{1,2}^2 = \begin{cases} 0, & x_{1,2} < 0.4, \\ -\dfrac{1}{0.3}(x_{1,2}-0.4), & 0.4 \leqslant x_{1,2} \leqslant 0.7, \\ 1, & x_{1,2} > 0.7. \end{cases}$$

考虑 $L^1$ 的渐近稳定条件,即

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - (2.178-0.603D)\lambda - 0.588 = 0. \tag{19}$$

其中 $\lambda$ 的模应小于 1[6],现做一复平面上的变换

$$\lambda = \frac{s+1}{s-1}, \tag{20}$$

当 $s$ 在左半平面时,$|\lambda| < 1$,成立[7].

式(20)代入式(19)后,得出

$$(-0.59+0.603D)s^2 + 0.824s + (3.766-0.603D) = 0. \tag{21}$$

用 Hurwitz 判据,应有

$$-0.59+0.603D > 0, \tag{22}$$

$$3.766-0.603D > 0, \tag{23}$$

得到

$$0.98 < D < 6.24. \tag{24}$$

同理,得出 $L^2$ 渐近稳定的条件

$$0.80 < D < 3.23. \tag{25}$$

故 $L^1$ 和 $L^2$ 同时渐近稳定的条件

$$0.98 < D < 3.23. \tag{26}$$

取 $D = 1.12$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1.503 & -0.588 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1.002 & -0.361 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

取 $P = \begin{bmatrix} 2.0 & -1.3 \\ -1.3 & 1.0 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵.

检验它是满足 $A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P$ 为负定矩阵,$i = 1,2$,故由 $A_1, A_2$ 构成的 FSM 是渐近稳定.

另外,可以假定一正定矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$,满足定理 4.1 的条件,取 $-I$ 为一般的负定矩阵,即 $A_i^{\mathrm{T}}PA_i - P = -I\ (i = 1,2)$,求解线性方程组,确定出 $D$ 的范围,由于篇幅有限,在此不做详细分析.

## 5 结 论

本文就社会经济系统研究的需要，将 Takagi-Sugeno 模型改造成一种较实用的模糊系统模式(FSM)，并给 FSM 的连续型和离散型渐近稳定的充分条件，以及构造 Lyapunov 函数的正定矩阵 $P$ 存在的必要条件，这些定理的作用是将对一个复杂、时变的模糊系统稳定性的研究转变成对一些较简单、线性定常子系统稳定性的研究.

## 参 考 文 献


[1] Wang, Y., Shen, J. and Wang, H.. Analysis of Fuzzy Macroeconomic Control Model. Proeedings of SRISMS'93, 1993, HIT Publiishers, 114—117

[2] 王意冈，申金升，王浣尘. 动态模式经济控制论模型的模糊形式研究. 中国数量经济学会第五届年会论文，1993

[3] Takagi, T. and Sugeno, M.. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. IEEE Trans. Syst. Man Cyber., 1985, SMC-15(1):116—132

[4] 王意冈，申金升，王浣尘. 模糊系统的解研究. 智能控制与智能自动化，北京：科学出版社，1993，834—838

[5] Tanaka, K. and Sugeno, M.. Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45:135—156

[6] D.G. 鲁恩伯杰著. 袁天鑫，黄午阳译. 社会动态系统引论. 上海：上海科学技术文献出版社，1985

[7] 张金水编. 确定性动态系统经济控制论. 北京：清华大学出版社，1989


# On Stability of A Fuzzy System Model


WANG Yigang and WANG Huanchen

(Institute of Systems Engineering, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200052, PRC)



**Abstract**: This paper establishes fuzzy system model (FSM) based on Takagi-Sugeno model. Then, it gives respectively sufficient conditions for the FSM of continuity and discreteness, as well as, necessary conditions in order to find a common positve definite matrix to construct Lyapunov Funtion. So, analysis of stabiltiy on FSM are changed into study of stability on subsystem for every fuzzy implication.



**Key words**: fuzzy system model; stability; Lyapunov function


## 本文作者简介


**王意冈** 1954年生. 1985年获西安交通大学系统工程硕士，1989～1991年在上海社会科学任助理研究员，1991年进入上海交通大学系统工程研究所攻读博士学位，现已毕业. 主要研究方向为社会经济系统的规划、控制和决策等方面.

**王浣尘** 1933年生. 上海交通大学系统工程研究所所长，教授，博士生导师. 主要研究领域为系统方法论，系统工程，经济控制论，系统策划与决策理论等.