误差方差及圆形区域极点约束下状态估计问题的研究：离散时间情形*

王子栋　郭　治
（南京理工大学自动控制系·南京，210094）

摘要：本文研究线性离散随机系统在稳、暂态指标约束下的状态估计问题，即设计滤波增益，使得每个状态的估计误差方差的稳态值不大于预先指定值，同时滤波矩阵的极点位于预先指定的圆形区域内. 本文说明上述指标约束可体现于一代数矩阵方程中，并藉此给出期望滤波增益的存在条件及解析表达式. 数值例子说明了文中设计方法的直接性与有效性.

关键词：线性离散随机系统；约束方差估计；区域极点配置

1　引　言

在随机控制领域中，线性系统的约束方差控制（即性能指标表现为系统状态方差的上界形式）问题近年来引起国内外众多学者的关注[1~8]. 因约束方差控制实质上是一种多目标设计问题，除满足给定的方差约束外，控制器的设计往往还留有相当大的自由度，从而可满足其它的指标约束（如输入能量[3]、闭环极点[5~6]、性能鲁棒性[7]、H_∞范数[8]等）.

对应地，在状态估计领域中也存在着类似的约束方差估计问题，即设计滤波增益，使每个状态的估计误差方差的稳态值不大于预先指定值. 这类状态估计问题在工程实践（如机动目标跟踪、航迹识别等）中有着很广泛的应用背景，传统的状态估计方法一般不能很好地解决这类问题，因为它们不能保证每个状态分量的估计误差都满足给定的方差约束.

文献[9]提出了一种称之为误差协方差配置估计（ECAE）理论的状态估计方法，即设计滤波增益，使状态估计的稳态误差协方差配置至指定值. 该理论可直接用来解决前述约束方差估计问题，但遗憾的是，它只考虑了滤波的稳态特性，而在工程应用中，倘若误差协方差达到稳态的过渡过程品质较差，将会严重影响滤波的实际应用效果. 基于此，本文讨论兼顾滤波过程稳、暂态特性的滤波增益的综合设计问题，即希望找到这样的滤波增益，使得每个状态分量的估计误差方差满足给定的约束，同时滤波矩阵的极点位于给定圆形区域内（关于圆形区域极点配置的说明参见文献[6][10]）. 本文将利用一修正的代数Riccati方程的正定解，给出期望滤波增益的存在条件及解析表达式.

2　问题的描述

考虑如下线性定常离散随机系统：

$$x(k+1) = Ax(k) + BuJ(k) + v(k) \tag{1a}$$

及测量方程

$$y(k) = Cx(k) + w(k), \quad C\text{ 行满秩} \tag{1b}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金及南京理工大学科研发展基金资助课题.
本文于 1993 年 11 月 1 日收到. 1994 年 10 月 4 日收到修改稿.

这里 $x \in \mathrm{R}^n$ 为状态，$u \in \mathrm{R}^m$ 为确定性输入，$y \in \mathrm{R}^p$ 为测量输出. 模型噪声 $v(k)$ 和测量噪声 $w(k)$ 为不相关的零均值高斯白噪声序列，且强度分别为 $V \geqslant 0$ 及 $W \geqslant 0$，初始状态 $x(0)$ 具有均值 $\bar{x}(0)$ 和协方差 $P(0)$，且与 $v(k)$ 和 $w(k)$ 不相关.

状态估计向量满足

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)) \tag{2}$$

其估计误差的稳态协方差

$$P = \lim_{k\to\infty} P(k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^{\mathrm{T}}]. \tag{3}$$

由(2)，(3)可得：

$$P(k+1) = (A - KC)P(k)(A - KC)^{\mathrm{T}} + KWK^{\mathrm{T}} + V. \tag{4}$$

若滤波矩阵 $A_F = A - KC$ 稳定(即其极点皆位于单位圆内)，则在稳态时，(4)式可写成

$$P = A_F P A_F^{\mathrm{T}} + KWK^{\mathrm{T}} + V \tag{5}$$

考虑如图1所示的圆形区域 $\Omega(q,r)$：圆心位于 $q + jo$，$q > 0$，半径为 r. 假设 $\sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个状态分量估计误差的方差约束，这里 σ_i^2 可视实际要求而定.

这样，我们可将所要解决的问题表述如下：
设计适当的滤波增益 K，使得：

a) 稳态误差协方差 P 满足

$$[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2, \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

这里 $[P]_{ii}$ 为矩阵 P 的第 i 个对角元素，即第 i 个状态分量估计误差的稳态方差. 指标约束 σ_i^2 应不小于由传统的最小方差估计获得的最小方差值.

b) 滤波矩阵 $A_F = A - KC$ 的极点皆位于圆形区域 $\Omega(q,r)$ 中，即

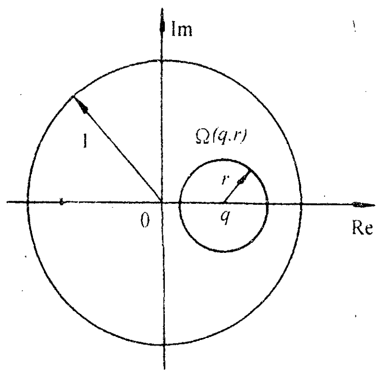

图1 单位圆内的圆形期望极点区域

$$\sigma(A_F) \subset \Omega(q,r). \tag{7}$$

3 辅助的 Q-矩阵配置问题

定理1 给定圆形区域 $\Omega(q,r)$. 则条件(7) 满足，如果存在滤波增益 K，使如下矩阵方程

$$A_F Q A_F^{\mathrm{T}} + (q^2 - r^2)Q + KWK^{\mathrm{T}} + V - q(A_F Q + Q A_F^{\mathrm{T}}) = 0 \tag{8}$$

有正定解 $Q > 0$. 进一步，如果方程(8)的正定解还满足

$$\left(A_F - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q} I\right) Q + Q\left(A_F - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q} I\right)^{\mathrm{T}} < 0, \tag{9}$$

则由(3)式定义的稳态误差协方差 P 存在且满足

$$P < Q. \tag{10}$$

这里 $P < Q$ 意味着 $P - Q$ 负定.

证 见附录.

由定理1，我们可采用如下方式达到设计目的，即选择合适的正定阵 Q，使之满足

$$[Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2, \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{11}$$

然后对给定的 Q，寻找使(8)(9) 两式成立的滤波增益 K 的集合. 若这样的滤波增益存在且可求，则由定理 1，我们有 $\sigma(A_F) \subset \Omega(q,r)$ 以及 $[P]_{ii} \leqslant [Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1,2,\cdots,n)$，从而指标要求(6)(7) 得到满足. 这样，我们所考虑的滤波增益的综合设计问题实质上便转化为一个辅助的"Q- 矩阵配置" 问题.

定义 1　给定期望的圆形区域 $\Omega(q,r)$ 及满足(11) 式的正定阵 Q. 若存在滤波增益 K 的集合，使矩阵方程(8) 及矩阵不等式(9) 关于给定的 Q 成立，则矩阵 Q 称为 Ω- 可配置矩阵.

借助于定义 1，我们可将辅助的"Q- 矩阵配置" 问题叙述如下：1) 找到正定阵 Q 为 Ω- 可配置的充要条件. 2) 若正定阵 Q 为 Ω- 可配置，找到相应的滤波增益 K 的集合.

4　主要结果及证明

引理 1[3]　设 $M \in \mathrm{R}^{m\times n}, N \in \mathrm{R}^{m\times p} (m \leqslant p)$，则存在矩阵 $V \in \mathrm{R}^{n\times p}$ 同时满足 $N = MV$，$VV^{\mathrm{T}} = I$，当且仅当 $MM^{\mathrm{T}} = NN^{\mathrm{T}}$.

现在，假定 Q 为给定的满足条件(11) 的正定阵，为获得 Q 为 Ω- 可配置的充要条件，我们首先考虑矩阵方程(8) 式. 因 $A_F = A - KC$，则(8)式可改写为

$$\begin{aligned} & -KCQ(A-qI)^{\mathrm{T}} - (A-qI)QC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} + K(CQC^{\mathrm{T}} + W)K^{\mathrm{T}} \\ & + (A-qI)Q(A-qI)^{\mathrm{T}} - r^2 Q + V = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

令 $R = CQC^{\mathrm{T}} + W$，因 $R > 0$，记 $R^{\frac{1}{2}}$ 为 R 的唯一正定平方根，则(12)式又可表示为：

$$\begin{aligned} & [-KR^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}][-KR^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}} \\ & = (A-qI)(QC^{\mathrm{T}}R^{-1}CQ - Q)(A-qI)^{\mathrm{T}} + r^2 Q - V. \end{aligned} \tag{13}$$

再令

$$S = (A-qI)(QC^{\mathrm{T}}\mathrm{R}^{-1}CQ - Q)(A-qI)^{\mathrm{T}} + r^2 Q - V. \tag{14}$$

考虑(13)式，因其左边非负定，从而应有

$$S \geqslant 0. \tag{15}$$

注意到(13)式左边部分中，式 $-K\mathrm{R}^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}$ 的维数为 $n \times p$，且 $p \leqslant n$，故仅当 S 的秩最大为 p 时，我们可取 S 的一个平方根因子为 $T(TT^{\mathrm{T}} = S)$，且 $T \in \mathrm{R}^{n\times p}$.

这样，我们可将(13)式表示为：

$$[-KR^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}][-KR^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}} = TT^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

据引理 1，上式等价于

$$-KR^{\frac{1}{2}} + (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-\frac{1}{2}} = TU. \tag{17}$$

其中 $U \in R^{p\times p}$ 为任一正交阵($UU^{\mathrm{T}} = I$)，则

$$K = (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-1} - TUR^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

下面考虑矩阵不等式(9)式. 将(18)式代入(9)式可得

$$Y + Y^{\mathrm{T}} < 0. \tag{19}$$

其中　$$Y = \left(A + TUR^{-\frac{1}{2}}C - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q}I\right)Q - (A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-1}CQ.$$

综上所述，我们可得到正定阵 Q 为 Ω- 可配置的充要条件.

定理 2　给定圆形区域 $\Omega(q,r)$ 及满足(11) 式的正定矩阵 Q，则 Q 是 Ω- 可配置的，当且

仅当

i) $$(A-qI)(QC^{\mathrm{T}}\mathrm{R}^{-1}CQ-Q)(A-qI)^{\mathrm{T}}+r^2Q-V\geqslant 0. \tag{20}$$

其中,上式左端部分的最大秩为 p,$R=CQC^{\mathrm{T}}+W$

ii) 存在正交阵 $U\in\mathrm{R}^{p\times p}$,使得(19)式成立.

下面我们给出当期望的正定阵 Q 为 Ω- 可配置时,相应滤波增益 K 的集合的表达式

定理 3 若正定阵 Q 满足定理 2 的条件,则配置该正定阵 Q 的滤波增益 K 的集合可表示为

$$\boldsymbol{K}=\{K:K=(A-qI)QC^{\mathrm{T}}R^{-1}-TUR^{-\frac{1}{2}},\text{正交阵 }U\in R^{p\times p}\text{ 满足(19)式}\}. \tag{21}$$

这里 $T\in\mathrm{R}^{n\times p}$ 为(20)式左边部分的平方根因子,且 $R=CQC^{\mathrm{T}}+W$.

下面是本文的主要结论.

定理 4 考虑线性离散系统(1),给定各状态分量估计误差的稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 以及滤波矩阵的圆形区域极点约束 $\Omega(q,r)$. 若有正定阵 Q 满足(11)式及定理 2 的条件 i) ii),则配置圆形区域极点的约束方差估计问题的解可由(21)式决定.

注 我们可看到条件(11)及定理 2 中的 i) ii) 易于验证且滤波增益 K 易于计算. 如何由(11)及定理 2 的 i) ii) 直接构造出 Ω- 可配置的正定阵 Q,将是我们进一步研究的课题,这包括解的相容性问题及解法的有限步收敛问题. 在工程应用中,因模型阶数经简化后一般较低,我们可通过如下方法达到设计目的:对不同的正交阵 U,通过局部搜索法求取满足配置条件的正定阵 Q,并据此得到滤波增益的集合.

5 数值例子

在机动目标跟踪问题中,常常期望找到这样的稳态滤波增益,以使得系统状态的估计值位于一预先给定的有效区域中. 显然,这样的指标要求可转化为对系统状态分量估计误差的稳态方差约束. 另一方面,为保证滤波的实际效果,还要求滤波具有良好的过渡过程品质,而这又可转化为对滤波矩阵的区域极点约束.

为此,设目标状态 $x=[x_1\quad \dot{x}_1]^{\mathrm{T}}$,其中 x_1 和 $\dot{x}_1$ 为位置和速度分量. 状态方程为

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+v(k).$$

其中采样周期 T 取为 1(秒), 测量方程为

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+w(k).$$

这里模型噪声 $v(k)$ 和测量噪声 $w(k)$ 的强度分别为:

$$V=0.001I_2,\quad W=0.1I_2.$$

设给定的各状态分量估计误差的稳态方差约束为: $[P]_{11}\leqslant 0.9216$, $[P]_{22}\leqslant 1.0237$;给定的滤波矩阵的圆形区域极点约束为: $\Omega(0.1,0.5)$. 下面我们求使误差稳态方差及滤波矩阵极点满足如上约束的滤波增益 K.

对正交阵 $U=I_2$,我们搜索使(11)及定理 2 中 i) ii) 成立的正定阵 Q, 可得:

$$Q=0.90001I_2.$$

经验证,(11)式显然成立,(19)(20)式左端分别为:

$$Y + Y^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -6.05308 & 0.28541 \\ -0.28541 & -6.12242 \end{bmatrix} < 0, \quad S = \begin{bmatrix} 0.0611 & -0.081 \\ -0.081 & 0.1511 \end{bmatrix} > 0.$$

从而(19) (20)式均满足，于是有

$$T = \begin{bmatrix} 0.24718 & 0 \\ -0.32823 & 0.20866 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.56282 & 0.9 \\ 0.32823 & 0.60134 \end{bmatrix}.$$

经验证，滤波矩阵 $A_F = A - KC$ 的极点为：$\{0.41792 \pm 0.18014i\}$；稳态误差方差值为 $[P]_{11} = 0.82191$，$[P]_{22} = 0.79964$，均满足给定约束，故所求滤波增益 K 满足要求.

6　结　论

本文提出并讨论了线性离散系统在稳态估计误差方差约束及滤波矩阵圆形区域极点约束下的状态估计问题，基于一修正的 Riccati 方程的正定解，给出了期望滤波增益的存在条件及解析表达式，进一步的研究将主要集中于解的相容性问题及算法的收敛性问题.

参 考 文 献

[1] Makila, P. M. et al.. Constrained Linear Quadratic Gaussian Control with Process Application. Automatica, 1984, 20(1): 15—29

[2] Hotz, A. and Skelton, R. E.. Covariance Control Theory. Int. J. Contr., 1987, 46(1): 13—32

[3] Collins, Jr. E. G. and Skelton, R. E.. A Theory of State Covariance Assignment for Discrete Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(1): 35—41

[4] Skelton, R. E. and Iwasaki, T.. Liapunov and Covariance Controllers. Int. J. Contr., 1993, 57: 519—536

[5] 王子栋，陈学敏，郭治. 配置极点的约束方差设计，自动化学报，1995, 21(3): 303—311

[6] Wang Zidong, Chen Xuemin and Guo Zhi. Controller Design for Continuous Systems with Variance and Circular Pole Constraints. Int. J. Systems Science, 1995, 26(5): 1249—1256

[7] 王子栋，郭治. 含结构参数扰动的线性连续系统的鲁棒约束方差控制. 自动化学报，1995

[8] Chang, W. J. and Chung, H. Y.. A Study of H_∞ Norm and Variance-Constrained Design Using Dynamic Output Feedback for Linear Discrete Systems. Int. J. Contr., 1993, 57(2): 473—484

[9] Yaz, E. and Skelton, R. E.. Continuous and Discrete State Estimation with Error Covariance Assignment. Proc. 30th IEEE CDC, Brighton, England, 1991, 3091—3092

[10] Furuta, K.. and Kim, S. B.. Pole Assignment in a Specified Disk. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32: 423—427

附　录

定理 1 的证明.

假设存在滤波增益 K 使得代数矩阵方程(8)有正定解 $Q > 0$。令 s 为 A_F^{T} 的一个特征值，η 为其相应的特征向量，则有

$$A_F^{\mathrm{T}}\eta = s\eta, \quad \bar{\eta}^{\mathrm{T}} A_F = \bar{s}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}. \tag{A1}$$

将(8)式左乘 $\bar{\eta}^{\mathrm{T}}$，右乘 η，我们有

$$\bar{\eta}^{\mathrm{T}} A_F Q A_F^{\mathrm{T}} \eta + (q^2 - r^2)\bar{\eta}^{\mathrm{T}} Q \eta + \bar{\eta}^{\mathrm{T}}(KWK^{\mathrm{T}} + V)\eta - q\bar{\eta}^{\mathrm{T}} A_F Q \eta - q\bar{\eta}^{\mathrm{T}} Q A_F^{\mathrm{T}} \eta = 0. \tag{A2}$$

将(A1)代入(A2)，可得

$$[-q(\bar{s} + s) + |s|^2 + (q^2 - r^2)]\bar{\eta}^{\mathrm{T}} Q \eta = -\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(KWK^{\mathrm{T}} + V)\eta. \tag{A3}$$

设 $s = x + jy$ 并将其代入上式，有

$$[-2qx + x^2 + y^2 + q^2 - r^2)\bar{\eta}^{\mathrm{T}}Q\eta = -\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(KWK^{\mathrm{T}} + V)\eta \tag{A4}$$

或

$$\{(x-q)^2 + y^2 - r^2\}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}Q\eta = -\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(KWK^{\mathrm{T}} + V)\eta \tag{A5}$$

因 $Q > 0$ 及 $KWK^{\mathrm{T}} + V \geqslant 0$(但不等于 0)，从而

$$(x-q)^2 + y^2 - r^2 < 0. \tag{A6}$$

即意味着 A_F^{T} 或 A_F 的特征值位于圆形区域 $\Omega(q,r)$ 内，则稳态误差协方差 P 存在且满足(5)式.

将(8)式减去(5)式，易见

$$A_F(Q-P)A_F^{\mathrm{T}} - (Q-P) = q(A_FQ + QA_F^{\mathrm{T}}) - (q^2 - r^2 + 1)Q, \tag{A7}$$

或

$$A_F(Q-P)A_F^{\mathrm{T}} - (Q-P) = q\left[\left(A_F - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q}I\right)Q + Q\left(A_F - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q}I\right)^{\mathrm{T}}\right]. \tag{A8}$$

若(9)式成立，则由 Lyapunov 稳定性理论，(10)式自然成立。

最后，为说明满足(9)式的正定阵 Q 的存在性，由 Lyapunov 稳定性理论，我们只需证 $\Phi = A_F - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q}I$ 的特征值均具有负实部. 因 $\sigma(A_F) \subset \Omega(q,r)$ 及 $q + r \leqslant 1$，令 t 为 A_F 的一个特征值，则

$$\mathrm{Re}(t) - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q} < q + r - \frac{q^2 - r^2 + 1}{2q} = \frac{(q+r)^2 - 1}{2q} \leqslant 0.$$

从而 Φ 的特征值具有负实部，定理 1 得证.

A Study of Error Variance and Circular Pole-Constrained State Estimation for Discrete-Time Systems

WANG Zidong and GUO Zhi

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: This paper focuses on the problem of state estimation for linear discrete stochastic systems with steady-state and transient performance constraints. The purpose of this problem is to design filter gains such that the steady-state value of the estimation error variance of each state is less than or equal to the prespecified value, and the poles of the filter matrix lie within the prespecified circular region. It is shown that the enforcement of above requirements is related to an algebraic matrix equation. Based on the equation, the existence conditions and the explicit expression of the expected filter gain are given. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the directness and efficientness of the design method presented in this paper.

Key words: linear discrete stochastic systems; constrained variance estimation; circular pole placement; covariance assignment control

本文作者简介

王子栋 见本刊 1995 年第 1 期第 17 页.

郭 治 见本刊 1995 年第 1 期第 17 页.