2-D 系统的干扰解耦*

邹 云 杨成梧

(南京理工大学动力工程学院·南京,210094)

摘要:本文讨论了 2-D 系统的干扰解耦问题(DDP),将 1-D 系统理论中的有关结果推广到了 2-D 线性离散常系数一般模型(2-DGM),得到了问题可解的充分条件和必要条件以及相应的算法.这些结果较好地改进了现有结果.

关键词:2-D 系统;干扰解耦;反馈控制

1 引 言

自 1974 年美国学者 R. P. Roesser[1]将强有力的 1-D 状态变量描述法引入了 2-D 图象处理系统,提出了著名的 2-D Roesser 模型,从而标志着 2—D 线性离散状态空间理论的诞生以来,2-D 系统理论已在各个侧面[2]如能控性[3],稳定性[4],观测器设计[5,6],最优控制[7,8]等获得了丰硕的成果,近期的相关进展可参见[9~12]及其所引参考文献等.然而有关 2-D 系统的综合问题[14]却少有文献涉及,如 2-D 干扰解耦问题(2-DDDP)目前只有[11]得到的部分结果.由于存在 2-D 特征值的 2-D 系统集测度为 0[9],所以 2-D 系统在本质上已不能沿用传统的 1-D 模态分析理论和方法,这也是 2-D 系统的综合问题难以成功处理的主要症结所在[2].本文则直接从状态响应公式出发,对 2-DDDP 定义及其设计问题进行了初步的分析和研究,得到了该问题可解的充要条件及其有关设计方法,所得结论较好地改进了现有结果[11].

2 预备知识

考虑如下形式的 2-D 一般状态模型(2-DGM)

$$\begin{aligned} x(i+1,j+1) =& A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) \\ &+ B_0u(i,j) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中,$x(i,j)\in \mathrm{R}^n$,$u(i,j)\in \mathrm{R}^m$ 分别为局部状态和输入向量,A_i,B_i,D 分别为适当维数的实矩阵.(2.1)的边界条件为

$$x(i,0),\quad x(0,j),\quad i,j=1,2,\cdots. \tag{2.2}$$

引理 2.1[2,3] 2-D 系统(2.1)在边界条件(2.2)下的状态响应公式为

$$\begin{aligned} x(i,j) =& \Phi(i-1,j-1)[A_0,B_0]\begin{bmatrix} x(0,0) \\ u(0,0) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^{i}\{\Phi(i-k,j-1)[A_1,B_1] + \Phi(i-k-1,j-1)[A_0,B_0]\}\begin{bmatrix} x(k,0) \\ u(k,0) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{l=1}^{j}\{\Phi(i-1,j-k)[A_2,B_2] + \Phi(i-1,j-k-1)[A_0,B_0]\}\begin{bmatrix} x(0,l) \\ u(0,l) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 6 月 17 日收到.

$$+\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}\{\Phi(i-k-1,j-l-1)B_0+\Phi(i-k,j-l-1)B_1$$
$$+\Phi(i-k-1,j-l)B_2\}u(k,l). \tag{2.3}$$

其中 $\Phi(i,j)$ 为系统(2.1)的 2-D 状态转移阵，定义为

$$\Phi(i,j)=A_0\Phi(i-1,j-1)+A_1\Phi(i,j-1)+A_2\Phi(i-1,j)$$
$$=\Phi(i-1,j-1)A_0+\Phi(i,j-1)A_1+\Phi(i-1,j)A_2, \tag{2.4a}$$
$$\Phi(0,0)=I,\quad \Phi(i,j)=0,\quad i<0 \text{ 或 } j<0. \tag{2.4b}$$

3 2-D 干扰解耦控制

3.1 可解性分析

考虑如下形式 2-D 系统

$$x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+B_0u(i,j)$$
$$+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1)+M_0f(i,j)$$
$$+M_1f(i+1,j)+M_2f(i,j+1), \tag{3.1a}$$
$$y(i,j)=Dx(i,j). \tag{3.1b}$$

其中 $x(i,j)$，$u(i,j)$ 同(2.1)，而 $y(i,j)\in \mathrm{R}^p$ 为输出向量，$f(i,j)\in \mathrm{R}^q$ 为外界干扰向量，边界条件仍为(2.2).

定义 3.1 所谓 2-D 干扰解问题(2-D DDP)* 系指：对给定系统(3.1)，寻求状态反馈

$$u(i,j)=Fx(i,j) \tag{3.2}$$

使得系统(3.1)对任何边界条件 $x(i,0),x(0,j),i,j=0,1,2,\cdots$ 以及任何 $f(i,j)\in \mathrm{R}^q$，闭环的输出 $y(i,j)$ 不受干扰，即 $y(i,j)$ 在任何边界条件(2.2)下的输出值均与任何 $f(i,j)\in \mathrm{R}^q$ 无关. 若 F 还使得相应闭环渐近稳定[2,4]，则称为稳定的 2-D DDP 问题. 这一问题本文暂不予讨论.

将(3.2)代入(3.1)可得相应闭环 Σ_c：

$$x(i+1,j+1)=A_{F_0}x(i,j)+A_{F_1}x(i+1,j)+A_{F_2}x(i,j+1)$$
$$+M_0f(i,j)+M_1f(i+1,j)+M_2f(i,j+1). \tag{3.3}$$

其中 $A_{F_i}=A_i+B_iF\quad(i=0,1,2)$. 由引理 2.1 知(3.3)的状态响应为：

$$x(i,j)=\Phi_F(i-1,j-1)[A_{F_0},M_0]\begin{bmatrix}x(0,0)\\f(0,0)\end{bmatrix}$$
$$+\sum_{k=1}^{i}\{\Phi_F(i-k,j-1)[A_{F_1},M_1]+\Phi_F(i-k-1,j-1)[A_{F_0},M_0]\}\begin{bmatrix}x(k,0)\\f(k,0)\end{bmatrix}$$
$$+\sum_{l=1}^{j}\{\Phi_F(i-1,j-l)[A_{F_2},M_2]+\Phi_F(i-1,j-l-1)[A_{F_0},M_0]\}\begin{bmatrix}x(0,l)\\f(0,l)\end{bmatrix}$$
$$+\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}\{\Phi_F(i-k-1,j-l-1)M_0+\Phi_F(i-k,j-l-1)M_1$$
$$+\Phi_F(i-k-1,j-l)M_2\}f(k,l). \tag{3.4}$$

---

* 1-D DDP 的相关讨论可参见 W. M. Wonham[15].

其中 $\Phi_F(i,j)$ 为系统(3.3)的 2-D 状态转移阵.

定理 3.1　2-D 系统(3.1)干扰解耦问题可解的充要条件为:存在 F 使得

$$D\Phi_F(i,j)M_k = 0,\quad (k=0,1,2),\quad 0\leqslant i,j\leqslant n. \tag{3.5}$$

证　充分性由(3.4)和引理 2.1 直接可得.下证必要性.由 $f(i,j)$ 的任意性及 2-D DDP 问题的提法有

$$D\Phi_F(i-1,j-1)M_0 = 0,\quad i,j=1,2,\cdots, \tag{3.6a}$$

$$D\Phi_F(i,j-1)M_1 + D\Phi_F(i-1,j-1)M_0 = 0,\quad i\geqslant 0,\quad j\geqslant 1, \tag{3.6b}$$

$$D\Phi_F(i-1,j)M_2 + D\Phi_F(i-1,j-1)M_0 = 0,\quad i\geqslant 1,\quad j\geqslant 0, \tag{3.6c}$$

$$D\{\Phi_F(i-1,j-1)M_0 + \Phi_F(i,j-1)M_1 + \Phi_F(i-1,j)M_2\} = 0,\quad i,j=1,2,\cdots. \tag{3.6d}$$

从而有 $D\Phi_F(i,j)M_k = 0,\quad k=0,1,2,\quad i,j=0,1,2,\cdots,n.$　　证毕.

定理 3.1 虽然给出了 2-D DDP 可解的充要条件,然而它在实质上是无法直接用于设计的.下节我们将给出类似于 Wonham[15]关于 1-D 情形的结果.

3.2　$(A_i,B_i)_p^q$-不变子空间

为了得到类似于 Wonham[15]关于 1-D 情形的结果,与[16]一样,有必要对著名的 (A,B)- 不变子空间概念加以必要的推广.为此,下设:$A_k\in \mathrm{R}^{n\times n}$,$B_k\in \mathrm{R}^{n\times m}$,$p\leqslant k\leqslant q$,

$$A=\begin{bmatrix} A_p\\ A_{p+1}\\ \vdots\\ A_q\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^{(q-p+1)n\times n},\quad B=\begin{bmatrix} B_p\\ B_{p+1}\\ \vdots\\ B_q\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^{(q-p+1)n\times m}, \tag{3.7}$$

且 $\mathrm{Im}B$ 和 $\ker D$ 分别为矩阵 B 的像空间和矩阵 D 的零核空间.

定义 3.2　设 $\mathscr{V}\subset\mathscr{W}\subset \mathrm{R}^n$ 均为子空间,若存在 $F\in \mathrm{R}^{m\times n}$ 使得

$$(A+BF)\mathscr{V}\subset\mathscr{V}^{(q-p+1)}\triangleq\mathscr{V}\times\mathscr{V}\times\cdots\times\mathscr{V}, \tag{3.8}$$

则称 $\mathscr{V}$ 为含于 $\mathscr{W}$ 的 $(A_i,B_i)_p^q$- 不变子空间.这里乘号"×"表示子空间的 Descartes 积.

显然,当 $p=q$ 时,定义 3.2 就是通常意义下的 (A,B)- 不变子空间定义[15].为方便计,亦将含于 $\mathscr{W}\subset \mathrm{R}^n$ 的全体 $(A_i,B_i)_p^q$- 不变子空间所组成的类记为 $\mathscr{J}_p^q(A_i,B_i,\mathscr{W})$.

引理 3.1　设 $\mathscr{V}\subset\mathscr{W}\subset \mathrm{R}^n$,则 $\mathscr{V}\in\mathscr{J}_p^q(A_i,B_i,\mathscr{W})$ 当且仅当

$$A\mathscr{V}\subset\mathscr{V}^{(q-p+1)}+\mathrm{Im}B. \tag{3.9}$$

证　必要性显然.下证充分性.设(3.9)成立,则对 $\forall\, v\in\mathscr{V}$,必存在 $w\in\mathscr{V}^{(q-p+1)}$ 和 $b\in\mathrm{Im}B$ 使得

$$Av = w + b. \tag{3.10}$$

从而若将 v 取成 $\mathscr{V}$ 的一组基 $\{e_i\}^l$,则有 $\{w_i\}_1^l\subset\mathscr{V}^{(q-p+1)}$,$\{x_i\}_1^l\subset \mathrm{R}^m$ 使得

$$Ae_i = w_i + Bx_i,\quad 1\leqslant i\leqslant l. \tag{3.11}$$

定义

$$F = -[x_1,\cdots,x_l,x_{l+1},\cdots,x_n][e_1,\cdots,e_l,e_{l+1},\cdots,e_n]^{-1}. \tag{3.12}$$

其中 $\{x_i\}_{l+1}^n\subset \mathrm{R}^m$ 为一组任意向量,而 $\{e_i\}_{l+1}^n$ 为使 $\{e_i\}_1^l$ 到 R^n 的基底的一组任意扩展向量,则显然即有(3.8)成立.　　证毕.

引理 3.2 子空间类 $\mathscr{J}_p^q\{A_i,B_i,\mathscr{W}\}$ 对于子空间加法运算是封闭的，从而存在唯一的一个最大元 $\mathscr{V}^*=\sup\mathscr{J}_p^q\{A_i,B_i,\mathscr{W}\}$.

证 显然成立.

3.3 2-DDDP 的解

从前面的讨论，立即可得出一个充分条件为：

定理 3.2 2-DDDP 可解的充分条件是

$$\mathrm{Im}M_k\subset\mathscr{V}^*,\quad 0\leqslant k\leqslant 2. \tag{3.13}$$

其中 $\mathscr{V}^*=\sup\mathscr{J}_0^2\{A_i,B_i,\ker D\}$ 为含于 $\ker D$ 的最大 $\{A_i,B_i\}_0^2$- 不变子空间.

证 若(3.14) 成立，则由引理 3.2 知存在 $F\in\mathrm{R}^{n\times m}$ 使得

$$A_{F_i}\mathscr{V}^*\subset\mathscr{V}^*,\quad 0\leqslant i\leqslant 2, \tag{3.14}$$

从而由(2.4)易知对 $\forall\, k=0,1,2$ 和 $i,j\geqslant 0$ 有

$$\mathrm{Im}\Phi_F(i,j)M_k=\Phi_F(i,j)\mathrm{Im}M_k\subset\Phi_F(i,j)\mathscr{V}^*\subset\mathscr{V}^*\subset\ker D. \tag{3.15}$$

此即(3.5). 于是由定理 3.1 即可知本定理得证.

现在遗留的一个问题是如何计算 $\mathscr{V}^*$. 对此，类似地亦有如下结论.

设 A,B 如(3.7) 所定义，并记 A^- 为 A 的某一 Penrose{1}- 广义逆. 即满足 $AXA=A$ 的任意某个矩阵 $A^-=X$. 定义映射

$$\pi(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathrm{Im}A,\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{3.16}$$

对任意子空间 $\mathscr{V}$ 令

$$A^{-1}\mathscr{V}\triangleq A^-\pi(\mathscr{V})+(I-A^-A)\mathrm{R}^n, \tag{3.17}$$

则由广义逆理论易知

$$A^{-1}\mathscr{V}=\{x:x\in\mathrm{R}^n,Ax\in\mathscr{V}\}. \tag{3.18}$$

我们有：

定理 3.3 定义子空间序列如下

$$\mathscr{V}_0=\ker D, \tag{3.19a}$$

$$\mathscr{V}_\mu=\ker D\cap A^{-1}\{\mathrm{Im}B+\mathscr{V}_{\mu-1}^3\},\quad \mu=1,2,\cdots. \tag{3.19b}$$

那么，$\mathscr{V}_\mu\subset\mathscr{V}_{\mu-1}$，且对某个 $k\leqslant\dim\ker D$ 有

$$\mathscr{V}_k=\sup\mathscr{J}_0^2\{A_i,B_i,\ker D\}. \tag{3.20}$$

证 显然有 $\mathscr{V}_1\subset\mathscr{V}_0$，若 $\mathscr{V}_\mu\subset\mathscr{V}_{\mu-1}$，则由(3.18)知：

$$\mathscr{V}_{\mu+1}=\ker D\cap A^{-1}\{\mathrm{Im}B+\mathscr{V}_\mu^3\}\subset\ker D\cap A^{-1}\{\mathrm{Im}B+\mathscr{V}_{\mu-1}^3\}=\mathscr{V}_\mu \tag{3.21}$$

因此对某个 $k\leqslant\dim\ker D$ 有 $\mathscr{V}_\mu=\mathscr{V}_k,(\mu\geqslant k)$. 回顾引理 3.1 知 $\mathscr{V}\in\mathscr{J}_0^2\{A_i,B_i,\ker D\}$ 当且仅当

$$\mathscr{V}\subset\ker D,\quad \mathscr{V}\subset A^{-1}\{\mathscr{V}^3+\mathrm{Im}B\}. \tag{3.22}$$

从而若 $\mathscr{V}\subset\mathscr{V}_{\mu-1}$，则由(3.22)和(3.19)知

$$\begin{aligned}\mathscr{V}&\subset\ker D\cap A^{-1}\{\mathscr{V}^3+\mathrm{Im}B\}\subset\ker D\cap A^{-1}\{\mathscr{V}_{\mu-1}^3+\mathrm{Im}B\}\\&=\mathscr{V}_\mu\subset\mathscr{V}_k.\end{aligned} \tag{3.23}$$

从而由 $\mathscr{V}\subset\mathscr{V}_0$ 和 $\mathscr{V}$ 的任意性即证得本定理.

显然定理 3.2 和定理 3.3 及引理 3.1 为 2-DDDP 提供了一个构造性的解. 关于(3.13)是否为 2-DDDP 可解的必要条件,目前我们尚不很清楚,然而下面的结果说明它在一定意义下距必要性并非“太远”.

定理 3.4　2-DDDP 可解的必要条件为:

$$\mathrm{Im} M_k \subset \mathscr{V}_1^* \cap \mathscr{V}_2^*, \quad k = 0,1,2. \tag{3.24}$$

其中 $\mathscr{V}_i^* = \sup \mathscr{I}_i^i\{A_i, B_i, \ker D\}$ 为含于 $\ker D$ 的意义下的最大(A_i, B_i)- 不变子空间.

证　由定理 3.1 知 2-DDDP 可解的必要条件为存在 $F \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 使得对于 $k,l = 0,1,2$ 有

$$\Phi_F(i,0)\mathrm{Im} M_k + \Phi_F(0,j)\mathrm{Im} M_l \subset \ker D, \quad i,j = 0,1,2,\cdots. \tag{3.25}$$

而由(2.4)易知:

$$\Phi_F(i,0) = A_{F_2}^i, \quad \Phi_F(0,j) = A_{F_1}^j. \tag{3.26}$$

从而由(3.25)立即可推得(3.24).　　证毕.

推论 3.1　若 $A_0 = A_1 = 0, B_0 = B_1 = 0$,或 $A_0 = A_2 = 0, B_0 = B_2 = 0$, 则 2-DDDP 可解的充要条件分别为

$$\mathrm{Im} M_k \subset \mathscr{V}_2^* \quad 或 \quad \mathrm{Im} M_k \subset \mathscr{V}_1^*, \quad k = 0,1,2. \tag{3.27}$$

其中 $\mathscr{V}_1^*, \mathscr{V}_2^*$ 如定理 3.4 所示.

证　这是定理 3.2 与定理 3.4 的直接推论.

推论 3.2　若 $A_1 = A_2 = 0, B_1 = B_2 = 0$, 则 2-D DDP 可解的充要条件为

$$\mathrm{Im} M_k \subset \mathscr{V}_0^*, \quad k = 0,1,2. \tag{3.28}$$

其中 $\mathscr{V}_0^* = \sup \mathscr{I}_0^2\{A_0, B_0, \ker D\}$.

证　由定理 3.2 知,此时

$$\mathscr{V}^* = \sup \mathscr{I}_0^2\{A_i, B_i, \ker D\} = \sup \mathscr{I}_0^0\{A_0, B_0, \ker D\} = \mathscr{V}_0^*, \tag{3.29}$$

故充分性得证. 下证必要性.

由定理 3.1 知 2-DDDP 可解的必要条件存在 $F \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 使得

$$\Phi_F(i,i)\mathrm{Im} M_k \subset \ker D, \quad i = 0,1,2,\cdots, \quad k = 0,1,2. \tag{3.30}$$

而此时由(2.4)易知:

$$\Phi_F(i,i) = A_{F_0}^i, \quad i = 0,1,2,\cdots. \tag{3.31}$$

由此即可由(3.30)证得(3.28).　证毕.

4　结束语

本文讨论了 2-DDDP 的可解性,分别给出了可解的一个构造性的充分条件和必要条件. 这些结论均较好地改进了现有结果,并将 Wonham 关于 1-D 情形的结果较好地推广到了 2-D 情形. 显然关于稳定的 2-DDDP 的研究的难度很大,仍有待于今后进一步的探讨.

参考文献

[1] Roesser, R. P.. A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, AC-20(1): 1—10

[2] 杨成梧,邹云. 2-D 线性离散系统. 北京:国防工业出版社,1995

[3] 杨成梧,陈雪如,邹云. 变系数 2-D 线性离散系统在一般模型下的状态响应及其观控性. 自动化学报,1991,17(5): 551—557

[4] 杨成梧,孙建中,邹云. 一般2D线性常系数离散状态空间模型渐近稳定性的一类Lyapunov方法. 控制理论与应用,1993,10(1):87—92

[5] 杨成梧,陈雪如. 2-D离散系统的观测器. 自动化学报,1991,17(6):601—605

[6] 邹云,杨成梧,孙建中. 一般模型2-D系统的观测器设计理论. 自动化学报,1994,20(4):486—493

[7] Kaczorek,T.. The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Singular 2-D Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989,AC-34(2):565—566

[8] Marszalak,W. and Sadecki,J.. Dynamic Programming for 2-D Discrete Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr.,1989,AC-34(1):181—184

[9] Zou Yun,Yang Chengwu. An Algorithm for Computation of 2D Eigenvalues. IEEE Trans. Automat. Contr.,1994, AC-39(7):1436—1439

[10] Zou Yun,Yang Chengwu. The Algorithm for the Computation of Transfer Function Matrices for 2-D Regular and Singular General State-Space Models. Automatica,1995,31(9):1311—1315

[11] 杨成梧,方勇. 2-D系统的静态干扰解耦控制. 自动化学报,1994,20(20):240—246

[12] Krogmeier,J. V. and Arun,K. S.. A Kronecker Rank Theorem for Two-Di-Mensional Non-Causal Systems. Int. J. Contr.,1993,57,407—431

[13] Digalakis,V. V.,Ingle,V. K. and Manolakis,D. G.. Three-Dimensional Linear Prediction and Its Applications. Multidimensional Systems and Signal Processing,1993,4:307—329

[14] Hinamoto,T. and Mackawa,S.. A Generalized Study on the Synthesis of 2-D State-Space Digital Filters with Minimum Roundoff Noise. IEEE Trans. Circuit Systems,1988,36(5):1037—1042

[15] Wonham,W. M.. 姚景依译. 线性多变量系统:一种几何方法. 北京:科学出版社,1984

[16] 邹云,杨成梧. 广义系统的输出稳定化问题通过MPD反馈的可解性. 控制理论与应用,1989,6(1):43—50

The Disturbance Decoupling Control for 2-D Systems

ZOU Yun and YANG Chengwu

(Power Engineering College,Nanjing University of Science & Technology · Nanjing,210094,PRC)

Abstract: In this paper,the disturbance decoupling problem (DDP) for 2-D general models (2-D GM) is discussed. In order to extend the corresponding results in 1-D case (see Wonham (1984)) to 2-D systems,the well-known concept of (A,B)-invariant subspace is generalized to the case that permits A to be a nonsquare matrix of some special forms. Based on this new concept,the sufficient conditions to the solvability of the DDP for 2-D GM are presented,and the corresponding design procedures are also proposed. These results have improved well the existing works.

Key words: 2-D systems; disturbance decoupling; feedback control

本文作者简介

邹 云 见本刊1995年第4期第476页.

杨成梧 见本刊1995年第4期第476页.