不确定性多变量系统的变结构最终滑动模态控制方案

朱志刚 周凤岐
(南京航空航天大学自动控制研究所·南京,210016) (西北工业大学航天工程学院·西安,710072)

摘要：为了改善多变量变结构控制系统的瞬态性能,本文提出了一种变结构最终滑动模态控制方案.文中方案克服了由于多变量变结构控制系统中存在多个滑动模态,而带来的因采用递阶控制方案导致控制结构复杂程度增加的缺点,有效地改善了系统状态进入最终滑动模态的动态品质,并对于参数摄动具有较强的鲁棒性.

关键词：变结构控制；最终滑动模态；变结构最终滑动模态

1 引 言

对于多变量线性控制系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其最终滑动模态为：

$$S_0 = \{x \mid Cx = 0\}, \quad C = [C_1^{\mathrm{T}}, \cdots, C_m^{\mathrm{T}}].$$

它为 m 个切换超平面

$$S_i: C_i x = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

的交集,这里 $C \in \mathrm{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}C = m$, $C_i \in \mathrm{R}^{1 \times n}$. 变结构控制的目的是使系统状态 x 进入最终滑动模态 S_0,并在其中形成滑动.由于在每个切换超平面上都可能出现滑动模态,因此对于(1)式系统,共计可能有 2^m 个滑动模态[1],这就增加了变结构控制系统的复杂程度.如何规定系统状态进入最终滑动模态的方案,以改善变结构系统的瞬态性能,就成为多变量变结构控制系统设计的一项重要任务.

递阶控制可以保证系统状态依次进入各级滑动模态,直至进入最终滑动模态.但是递阶控制的结构较为复杂,且状态进入最终滑动模态的动态过程无法加以规划,瞬态性能不易于改善.

单位向量控制是真正实现最终滑动模态控制的有效方案[2],其控制形式保证了系统状态直接进入最终滑动模态 S_0,而不出现其它维数的滑动模态,并能通过规定状态进入最终滑动模态的动态过程,有效地改善变结构系统的瞬态性能.

本文提出了一种适用于对象具有未知参数摄动的多变量变结构最终滑动模态控制方案,通过在变结构控制律中引入与状态有关的时变因子项,既有效地改善了变结构系统的瞬态性能,又较好地克服了未知参数摄动的影响,提高了变结构系统的鲁棒稳定性.

2 控制对象及控制结构

控制对象为

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta Bu) + Df, \tag{2}$$

本文于1993年10月4日收到. 1995年9月6日收到修改稿.

$x \in \mathrm{R}^n$ 为状态向量，$u \in \mathrm{R}^m$ 为控制向量，$f \in \mathrm{R}^l$ 为外界干扰. 假设：a) (A, B) 为可控阵对；b) $\mathrm{rank}\, B = [B \quad \Delta B] = m$；c) ΔA、ΔB 各元素均有界，$\| f \| \leqslant k_f$. 控制结构为

$$u(x) = u_L(x) + u_N(x) = Lx + \rho(t) \frac{Nx}{\| Mx \|}. \tag{3}$$

线性控制 $u_L(x) = Lx$ 为状态反馈控制律，目的在于改变控制对象的动力学特性，使之能以良好的动态品质趋于最终滑动模态 S_0；非线性控制 $u_N(x) = \rho(t) \frac{Nx}{\| Mx \|}$，克服未知参数摄动及外界干扰，促使变结构系统于有限时刻进入最终滑动模态，形成滑动运动. 要求矩阵 M、N 的选取，应满足关系式：

$$\ker M = \ker N. \tag{4}$$

3　变结构控制器综合

假设在存在未知参数摄动情况下，根据文献[3]已设计得到渐近稳定的最终滑动模态为

$$S_0 = \{x | Cx = 0\}. \tag{5}$$

(2)式可经过非奇异线性变换 $\tilde{x} = T_1 x$，变换为[1]

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \Delta\tilde{A}_{21} & \Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\tilde{B}_2 \end{bmatrix} \right) u + \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} f. \tag{6}$$

切换函数：$S = CT_1^{-1}\tilde{x} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]\tilde{x} = 0$，$\tilde{x}_1 \in \mathrm{R}^{n-m}$，$\tilde{x}_2 \in \mathrm{R}^m$，$\tilde{B}_2 \in \mathrm{R}^{m\times m}$ 和 $\tilde{C}_2 \in \mathrm{R}^{m\times m}$ 非奇异. 对(6)式再作非奇异线性变换：

$$y = T_2\tilde{x} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ \tilde{C}_2^{-1}\tilde{C}_1 & I_m \end{bmatrix} \tilde{x},$$

则有

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \Delta A_{21} & \Delta A_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B_2 \end{bmatrix} \right) u + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} f. \tag{7}$$

切换函数变换为：$S = C_2 y_2 = 0$，这里：$y_1 \in \mathrm{R}^{n-m}$，$y_2 \in \mathrm{R}^m$，$B_2 \in \mathrm{R}^{m\times m}$ 和 $C_2 \in \mathrm{R}^{m\times m}$ 非奇异，且有 $C_2 = \tilde{C}_2$ 成立. 那么最终滑动模态等效为

$$S_0 = \ker C_2 = \{y | C_2 y_2 = 0\}.$$

由(7)式可见：$y_2(t) \to 0$ 的过程描述了系统状态进入最终滑动模态的过程. 当 $y_2(t) = 0$ 时，$y_1(t)$ 则描述了变结构系统进入最终滑动模态后的滑动运动. 基于上述分析，变结构控制律的设计针对下式进行：

$$\dot{y}_2 = ([A_{21} \quad A_{22}] + [\Delta A_{21} \quad \Delta A_{22}]) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + (B_2 + \Delta B_2)u + D_2 f. \tag{8}$$

(3)式所示的变结构最终滑动模态控制律相应变换为

$$u(y) = u_L(y) + u_N(y). \tag{9}$$

(8)式的标称方程为

$$\dot{y}_2 = [A_{21} \quad A_{22}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + B_2 u. \tag{10}$$

为了保证系统状态能以较好的动态品质趋于最终滑动模态 S_0，即 $y_2 \to 0$，线性控制律

取为

$$u_L(y) = -B_2^{-1}[A_{21} \quad A_{22} - A_{22}^{*}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中 $A_{22}^{*} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为设计 Hurwitz 矩阵，将(11)式代入(10)式得：$\dot{y}_2 = A_{22}^{*} y_2$，所以有

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0,$$

那么

$$u_L(x) = -B_2^{-1}[A_{21} \quad A_{22} - A_{22}^{*}]T_2T_1x. \tag{12}$$

因为 A_{22}^{*} 为 Hurwitz 矩阵，则必存在对称正定矩阵 $P,Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$，满足 Lyapunov 方程：

$$PA_{22}^{*} + (A_{22}^{*})^{\mathrm{T}}P = -Q,$$

选取

$$M' = P, \quad N' = -B_2^{-1}P,$$

显然，矩阵 M'，N' 满足(4)式要求. 考虑到(8)式存在的参数不确定性，非线性控制律取为

$$u_N(y) = \rho(t)\frac{N'y_2}{\|M'y_2\|}. \tag{13}$$

$\rho(t) > 0$ 为设计参数. 将(9)，(11)，(13)代入(8)式，并令：$\eta = [\Delta A_{21} \quad \Delta A_{22}]y$，可得

$$\dot{y}_2 = A_{22}^{*}y_2 - \rho(t)\frac{Py_2}{\|Py_2\|} + \eta + \Delta B_2\left(u_L - \rho(t)\frac{B_2^{-1}Py_2}{\|Py_2\|}\right) + D_2 f.$$

选取 Lyapunov 函数为 $v = \frac{1}{2}y_2^{\mathrm{T}}Py_2$. 由假设可知：

$$\|\eta\| \leqslant k_a'\|y\| \leqslant k_a\|x\|, \quad \|u_L\| \leqslant k_u\|x\|, \quad \|\Delta B_2\| \leqslant k_b, \quad \|D_2\| \leqslant k_d,$$

那么可推知：

$$\dot{v} \leqslant -\rho(t)\|Py_2\| + \|Py_2\|(k_a'\|y\| + k_b\|u_L\| + \rho(t)k_b\|B_2^{-1}\| + k_d k_f).$$

为保证 $\dot{v} < 0$，则应有下式成立：

$$\rho(t) > (1 - k_b\|B_2^{-1}\|)^{-1}(k_a'\|y\| + k_b\|u_L\| + k_d k_f). \tag{14}$$

由于在变结构控制系统中，保证最终滑动模态(5)唯一存在并可确定须有下述条件成立[1]：

$$k_b\|B_2^{-1}\| = \delta < 1. \tag{15}$$

所以非线性控制律为：

$$u_N(x) = \rho(t)\frac{Nx}{\|Mx\|}, \tag{16a}$$

$$N = -B_2^{-1}P[0 \quad I_m]T_2T_1, \quad M = P[0 \quad I_m]T_2T_1, \tag{16b}$$

$$\rho(t) = (1-\delta)^{-1}[(k_a + k_b k_u)\|x\| + k_d k_f] + \varepsilon, \tag{16c}$$

$\varepsilon > 0$ 为任意小正数.

至此，得到了由(3)，(12)，(16)式构成的变结构最终滑动模态控制方案.

4 稳定性分析

设 $\lambda_{\min}$，$\lambda_{\max}$ 分别为矩阵 P 的最小、最大特征值，则有：

$$\lambda_{\min}y_2^{\mathrm{T}}y_2 \leqslant y_2^{\mathrm{T}}Py_2 \leqslant \lambda_{\max}y_2^{\mathrm{T}}y_2, \quad \lambda_{\min}^2 y_2^{\mathrm{T}}y_2 \leqslant y_2^{\mathrm{T}}P^2y_2 \leqslant \lambda_{\max}^2 y_2^{\mathrm{T}}y_2.$$

综合上述两式可得：

$$\|Py_2\|^2 \geqslant y_2^{\mathrm{T}}P^2y_2 \geqslant \frac{\lambda_{\min}^2}{\lambda_{\max}}y_2^{\mathrm{T}}Py_2 = \frac{2\lambda_{\min}^2}{\lambda_{\max}}v.$$

由(14)式可知，必存在 $\alpha > 0$，使得下述不等式成立：

$$\dot{v} \leqslant -\alpha \| P y_2 \| \leqslant -\alpha \lambda_{\min} \sqrt{\frac{2v}{\lambda_{\max}}}.$$

积分上式可得

$$\int_{v_0}^{0} v^{-1/2} \mathrm{d}v \leqslant -\alpha \lambda_{\min} \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\max}}} \int_0^{\tau^*} \mathrm{d}t,$$

所以

$$\tau \leqslant \tau^* = \frac{\sqrt{2\lambda_{\max} v_0}}{\alpha \lambda_{\min}}.$$

因此，采用前述变结构最终滑动模态控制律，可以保证变结构系统于有限时刻 $\tau \leqslant \tau^*$ 进入最终滑动模态，并有如下定理.

定理　对于控制对象(2)，在假设条件得以满足的情况下，如果下述条件成立，变结构控制系统存在渐近稳定的滑动运动：

1) 最终滑动模态 S_0 保证滑动运动的渐近稳定性；

2) (15)式条件满足；

3) 变结构最终滑动模态控制律由(3)、(12)、(16)式构成.

5　仿真算例

假设控制对象为：

$$\dot{x} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 \end{bmatrix}\right] x + \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1 & 0 \\ 0 & \Delta b_2 \end{bmatrix}\right] u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f.$$

其中

$$\Delta a_1 = 0.5\sin(4\pi t),\quad \Delta a_2 = 0.7\sin(4\pi t),\quad \Delta a_3 = \cos(4\pi t),$$
$$\Delta b_1 = 0.2\sin(4\pi t),\quad \Delta b_2 = 0.5\cos(4\pi t),\quad \| f \| \leqslant 1.$$

要求变结构系统进入最终滑动模态的过渡过程快速性要好、调节时间不能超过 1 秒，系统的最终滑动模态为：

$$S_0 = \left\{ x \,\middle|\, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \right\},$$

那么可设计得到：

$$u_L(x) = \begin{bmatrix} -25 & -7.5 & -0.5 \\ -0.75 & -1 & -1.25 \end{bmatrix} x,\quad u_N(x) = \rho(t) \frac{Nx}{\| Mx \|},$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.025 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0125 \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$\rho(t) = 0.5 + (1 + 21 \| x \|)/0.6.$$

图 1 为切换函数 S 的变化曲线，图 2 为状态 x 的变化曲线，从仿真结果可以看出，变结构系统的状态于 0.6 秒同时进入最终滑动模态，并于 1.2 秒由初始状态[2　-4　5]衰减至 0，满足了设计要求.

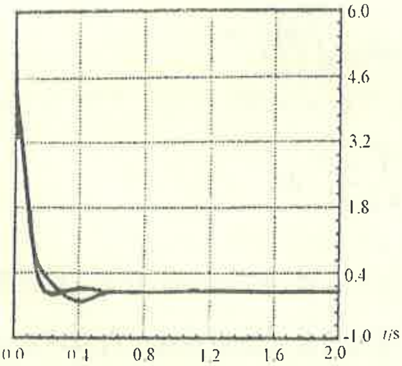

图1 切换函数 S 变化曲线

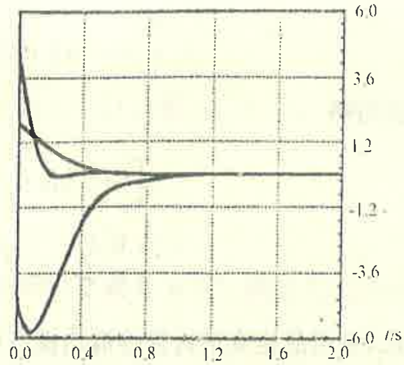

图2 状态 x 的变化曲线

6 结 论

本文提出的变结构最终滑动模态控制方案,较好地改善了系统状态进入滑动运动的动态品质,并保证了最终滑动模态的直接进入,而不出现其它维数的滑动模态,在控制规律中引入的时变因子项,较好地克服了参数摄动对系统稳定性的影响,理论分析和仿真结果都表明,该方案具有较强的鲁棒性.

在现阶段的研究中,变结构控制系统的设计都假设系统的状态完全可测,当系统状态不可测时,如何设计变结构控制系统是变结构系统研究的一个发展方向,还有待于进一步的研究.

参 考 文 献

[1] 高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科学技术出版社,1990

[2] Dorling,C. M. and Zinober,A. S. I. . Robust Hyperplane Design in Multivariable Variable Structure Control Systems. Int. J. Control,1988,48(5):2043—2054

[3] 周军.不确定性系统的变结构自适应控制理论及应用.西北工业大学博士学位论文.西安,1993

[4] Utkin,V. I. . Variable Structure Systems with Sliding Modes. IEEE Trans. Automat. Contr. ,1977,AC-22(20):212—222

Variable Structure Terminal Sliding Mode Control for Uncertain Multivariable Linear Systems

ZHU Zhigang

(Automatic Control Research Institute,Nanjing University of Aeronautics and Astronautics · Nanjing,210016,PRC)

ZHOU Fengqi

(College of Astronautics,Northwestern Polytechnical University · Xi'an,710072,PRC)

Abstract: To improve the transient performance of multivariable variable structure control systems,a variable structure terminal sliding mode control approach is proposed in this paper. The approach over-

comes the drawback that hierarchical control structure is too complicated because much more sliding modes exist in multivariable variable structure control systems. It is shown that for parameter perturbations, the aproach is robust.

Key words: variable structure control; terminal sliding mode; variable structure terminal sliding mode control

本文作者简介

朱志刚　1968年生. 分别在1988年7月, 1991年1月, 1994年7月于西北工业大学航天工程学院飞行器控制、制导与仿真专业获得学士、硕士、博士学位, 现为南京航空航天大学航空宇航技术学科博士后研究人员. 主要研究方向为变结构控制, 飞行控制及低空突防技术.

周凤岐　1935年生. 西北工业大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为变结构控制、自适应控制及其在飞行控制中的应用.

'96《中国控制会议》

征　文　通　知

'96《中国控制会议》拟定于一九九六年第三季度在山东青岛举行. 会议由中国自动化学会控制理论专业委员会主办, IEEE北京分部协办, 青岛大学承办. 具体事宜如下:

一、征文范围: 控制理论及其应用未发表的论文, 内容包括下列领域的理论与应用:

线性系统　非线性系统　随机控制系统　计算机集成制造系统　专家系统　分布参数系统　离散事件系统　社会经济系统　大系统　H_∞控制　适应控制　生态环境系统　鲁棒控制　预测控制　智能控制　机器人控制　模糊控制　神经网络　容错控制　系统辨识与建模　模型降阶　稳定性分析　最优估计　计算机辅助研究与设计　工业控制

二、截止日期: 收稿截止日期为1996年3月31日.

三、会议请奖: 凡申请《中国控制会议》第三届《关肇直奖》的论文, 需在投稿时注明, 交论文一式九份, 并附工作证(或学生证)和身份证复印件, 及至少一份同行教授级专家推荐意见(参见《关肇直奖》条例).

四、说明:

1. 会议录取的文章, 将于5月初通知作者.
2. 论文集将由正式出版社出版.
3. 请作者自留底稿, 无论是否录取, 一律不退稿.

联系人: 张月田

通讯地址: 中国科学院系统科学研究所(北京中关村　100080)

电话: (010)2553063　传真: (010)2568364　电子信箱: epwang @ iss 03. iss. ac. cn

中国自动化学会控制理论专业委员会

一九九五年十二月