第 13 卷第 1 期
1996 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 1
Feb., 1996

关于非线性系统非正则线性化的一个充分条件*

孙振东　夏小华
(北京航空航天大学第七研究室,100083)

摘要：本文得到关于仿射非线性系统非正则反馈线性化问题的一个充分条件,给出并讨论了一个例子.

关键词：仿射非线性系统；正则反馈线性化；非正则静态反馈线性化

1 引　言

自 1973 年 Krener[1]的工作以来,人们对非线性系统的精确线性化问题的研究日益深入,主要的研究兴趣集中在寻找几何的可解条件. 文献[2～4]研究了正则静态线性化问题,并对问题的可解性进行了完全的刻划. 对于不能通过正则静态反馈线性化的系统,文献[5,6]给出了最大反馈线性化子系统的构造方法和维数的计算,从而解决了正则静态反馈部分线性化问题.

另一类更广泛的问题是动态反馈线性化问题. 这一问题至今还没有得到完全的解决. 文献[7,8]讨论了通过加积分器实现线性化,给出了几个充分条件,并解决几类特殊情形的正则动态线性化问题.

文献[2～8]所考虑的状态反馈都必须满足正则性条件,所考虑的线性化问题可以通称为正则反馈线性化问题. 有关的结果综述可参见文献[9].

最近,文献[10]提出并考察了非正则的状态反馈线性化问题. 非正则反馈线性化问题是正则反馈线性化问题的自然拓广. 对它的研究具有重要的理论意义和实际背景. 一方面,例子[10]表明非正则静态反馈线性化问题不被正则动态反馈线性化问题所蕴含,因此具有独立的研究价值,另一方面,即使对可通过正则反馈线性化的系统,考虑其通过非正则反馈线性化也有工程上的意义,例如,它可以减少所需的输入通道数,而且/或者可避免使用动态补偿器. 但是由于取消了正则性条件,对问题的讨论变得更加困难.

本文给出仿射非线性系统可通过非正则静态反馈线性化的一个易验证的充分条件,举例指出文献[7]的一个主要结果存在问题并予以改正.

2 回顾与记号

本文的讨论局限于在原点附近的局部线性化问题,并假定 f, G 在原点附近 C^∞ 可微.

考虑以下形式的仿射非线性系统：

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + G(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

其中 $f(0) = 0$, $\operatorname{rank} G(0) = m$.

---

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1994 年 7 月 14 日收到. 1995 年 2 月 20 日收到修改稿.

所谓非正则静态反馈线性化问题，就是寻找形如

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \alpha(0) = 0, \quad \beta(x): m \times m', \quad m' \leqslant m \tag{2}$$

的状态反馈及状态坐标变换

$$z = \phi(x), \quad \phi(0) = 0. \tag{3}$$

把系统(1)转化为能控的线性系统

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad z \in \mathrm{R}^n, v \in \mathrm{R}^{m'}. \tag{4}$$

这里 $m' \leqslant m$. 如果上述问题有解，则称系统(1)是可通过非正则静态反馈线性化的.

显然，若要求(2)中的函数阵 $\beta(x)$ 是非奇异的，则非正则静态反馈线性化问题退化为正则静态反馈线性化问题.

以下记号和结果取自文献[6,7].

对系统(1)，定义(记 $\bar{L}$ 为 L 的对合闭包(involutive closure))：

$$L_0 = \mathrm{span}\,\{g_1, \cdots, g_m\}, \quad L_{i+1} = \bar{L}_i + ad_f^{i+1} L_0, \quad i = 0, 1, \cdots. \tag{5}$$

假定分布 L_i 与 $\bar{L}_i$ 在原点附近具有常秩. 定义整数列：

$$r_0 = \mathrm{rank}\, L_0, \quad r_i = \mathrm{rank}\, L_i - \mathrm{rank}\, \bar{L}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

及

$$k_i = \mathrm{card}\,\{j : r_j \geqslant i, \ j \geqslant 0\}, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{7}$$

这里 rank L 表示分布 L 在原点的秩，card{·}表示集合{·}中元素的个数.

文献[6]指出，存在正则的反馈变换(2)及状态坐标变换(3)，将系统(1)转化为

$$\begin{aligned} \dot{z}^{(1)} &= A_c z^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} B_i v_i = A_c z^{(1)} + B_c v, \\ \dot{z}^{(2)} &= a(z^{(1)}, z^{(2)}) + \sum_{i=1}^{m} b_i(z^{(1)}, z^{(2)}) v_i = a(z^{(1)}, z^{(2)}) + b(z^{(1)}, z^{(2)}) v. \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$z^{(1)} = (z_1, \cdots, z_q), \quad z^{(2)} = (z_{q+1}, \cdots, z_n), \quad q = \sum_{i=1}^{m} k_i,$$

$$A_c = \mathrm{block\ diag}(A_1^c, \cdots, A_m^c), \quad B_c = \mathrm{block\ diag}(B_1^c, \cdots, B_m^c),$$

$$A_i^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad B_i^c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k_i \times 1}.$$

系统(8)称为(系统(1)的)‘伪标准’形式(‘pseudocanonical’ form).

下面的两个结果取自文献[10]，将在以后两节中用到.

引理 2.1 设 $\Delta(\cdot)$ 是流形 R^n 上的光滑分布，且 $\Delta \subseteq \mathrm{span}\,\{g_1, \cdots, g_m\}$，设光滑向量场 f_0 满足 $f_0 - f \in \mathrm{span}\,\{g_i, i = 1, \cdots, m\}$，且 $f_0(0) = 0$，令

$$\Delta_0 = \Delta, \quad \Delta_i = \Delta_{i-1} + ad_{f_0}^i \Delta, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

若 1) $\Delta_0, \cdots, \Delta_{n-2}$ 常秩且对合，

2) rank $\Delta_{n-1} = n$，

则系统(1) 可以通过非正则静态反馈线性化.

引理 2.2 双输入系统($m=2$) 可通过非正则静态反馈线性化的必要条件是

$$\mathrm{span}^+\{[g_1,[f,g_1]],[g_2,[f,g_2]]\} \cap \mathrm{span}\{g_1,g_2,[f,g_1],[f,g_2],[g_1,g_2],$$
$$[g_1,[f,g_2]]+[g_2,[f,g_1]],[g_1,[g_2,g_1]],[g_2,[g_1,g_2]]\} \neq \varnothing.$$

其中
$$\mathrm{span}^+\{h_1,h_2\} \overset{\mathrm{def}}{=} \{h_i + a h_j : a \geqslant 0,\ i \neq j,\ i,j=1,2\}.$$

3 主要结果

定理 3.1 设系统(1)满足 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n-1$,其中 k_i 由式(5) ～ (7) 确定. 令

$$\dot{x} = \underline{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} \underline{g}_i(x) v_i(t) \tag{9}$$

是系统(1)的'伪标准'形式. 设对某个 j 成立

$$ad_{\underline{f}}^{k_j} \underline{g}_j \notin \underline{\Delta}. \tag{10}$$

其中

$$\Delta = L_{k_j-2} + \mathrm{span}\{ad_{\underline{f}}^{k_j-1} \underline{g}_j\}, \tag{11}$$

且 $\underline{\Delta}$ 为 Δ 的对合闭包. 若 $\underline{\Delta}$ 与 $\underline{\Delta} + \mathrm{span}\{ad_{\underline{f}}^{k_j} \underline{g}_j\}$ 均具常秩,则系统(1)可以通过非正则静态反馈线性化.

证　由题设知存在 R^n 上的实函数 φ 使 $\varphi(0)=0$ 且

$$\mathrm{d}\varphi \perp \Delta, < \mathrm{d}\varphi,\ ad_{\underline{f}}^{k_j} \underline{g}_j > (0) \neq 0. \tag{12}$$

不妨设 $j=m$,令 $v_1 = x_1^2, \cdots, v_{m-2} = x_1^m, v_{m-1} = \varphi$, 则系统化为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2^1 \\ \vdots \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_2^{m-1} \\ \vdots \\ x_{k_{(m-1)}}^{m-1} \\ \varphi \\ x_2^m \\ \vdots \\ x_{k_m}^m \\ 0 \\ a + b_1 x_1^2 + \cdots + b_{m-2} x_1^{m-1} + b_{m-1}\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ b_m \end{bmatrix} v_m \overset{\mathrm{def}}{=} f' + g' v_m. \tag{13}$$

取 $y = x_1^1$, 则由题设可算得

$$y^{(i)} = y^{(i)}(x), \quad i = 1, \cdots, n-2,$$

$$y^{(n-1)} = L_{\underline{f}}^{k_m-1}\varphi + \sum_{i=1}^{m-2} (L_{\underline{g}_i} L_{\underline{f}}^{k_m-2}\varphi) x_1^{i+1} + (L_{\underline{g}_{m-1}} L_{\underline{f}}^{k_m-2}\varphi)\varphi,$$

$$y^{(n)} = c_1(x) + (L_{g_m} L_f^{k_m - 1} \varphi + c_2(x)) v_m.$$

其中 c_1, c_2 为 R^n 上的实函数，且 $c_2(0) = 0$.

由(12) 知函数$(L_{g_m} L_f^{k_m - 1} \varphi)$ 在原点不为零. 故带输出的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f' + g'v, \\ y = x_1^1 \end{cases}$$

的相对度为 n. 因此系统 $\dot{x} = f' + g'v$ 可通过正则静态反馈线性化.

由引理 2.1，系统(1) 可通过非正则静态反馈线性化.　　证毕.

推论 3.2　若系统(1) 满足 $m = n - 1$，则下述命题等价：

i) 系统(1)可通过非正则静态反馈线性化.

ii) 系统(1)在原点的一次近似系统

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} x + G(0)u \overset{\text{def}}{=} Fx + Gu$$

能控.

证　ii)→i)　参见文献[7]中推论 4.2 的证明.

i)→ii)　参见文献[10].

例 3.3　考察系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 + x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x_4^2 x_5 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2. \tag{14}$$

它本身已是'伪标准'形式，且 $k_1 = 3, k_2 = 1$. 令 $j = 2$，可以验证定理 3.1 的题设成立，因而系统(14) 可通过非正则静态反馈线性化.

下面具体构造所需要的状态反馈和状态变换.

取 $\varphi = x_5$，令 $u_1 = \varphi = x_5$，则系统(14)化为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ 0 \\ x_4 + x_3^2 + x_4^2 x_5^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2. \tag{15}$$

由定理 3.1 的证明知系统(15)可通过正则静态反馈线性化.

利用标准技术，可知在坐标变换

$$z = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_4 + x_3^2 + x_4^2 x_5^2) \tag{16}$$

及状态反馈

$$u_2 = \frac{v - 2x_3 x_5 - 2x_4^3 x_5 - 2x_3^2 x_4^2 x_5 - 2x_4^4 x_5^3}{1 + 2x_4 x_5^2}$$

下，系统(15)转化为标准的单输入能控线性系统.

综合以上几点，可知在状态反馈

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ \dfrac{v - 2x_3x_5 - 2x_4^3x_5 - 2x_3^2x_4^2x_5 - 2x_4^4x_5^3}{1 + 2x_4x_5^2} \end{bmatrix}$$

及状态坐标变换(16)下,系统(14)转化为标准的单输入能控线性系统.

4 例子分析

定理 3.1 的题设与文献[7]中定理 4.1 的题设很相似,主要的差别是定理 3.1 增加了对有关分布的常秩性要求. 下面的例子表明,这些常秩要求是不可缺少的,同时也表明[7]中定理 4.1 是不完整的.

例 4.1 考察系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_2 + x_1^2 + x_3^2x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2. \tag{17}$$

容易验证

$$\mathrm{span}^+ \{[g_1,[f,g_1]],[g_2,[f,g_2]]\} \cap \mathrm{span}\{g_1,g_2,[f,g_1],[f,g_2]\} = \varnothing..$$

由引理 2.2 知系统(17)不能通过非正则静态反馈线性化.

系统(17)本身已为'伪标准'形式, $k_1 = 1, k_2 = 2$,令 $j = 2$,可验证(17)满足定理 3.1 除常秩性以外的所有假设. 这表明定理 3.1 的常秩性假设是不可缺少的.

另一方面,可以证明系统(17)不能通过加积分器正则动态反馈线性化. 但系统(17)满足文献[7]定理 4.1 的所有题设. 这表明[7]中定理 4.1 是不完整的. 事实上,在缺乏常秩性假设的情形下,[7]中定理 4.1 证明中所用到的函数 φ 一般不存在. 可以证明,在假设 $\bar{\Delta}$ 与 $\bar{\bar{\Delta}} + \mathrm{span}\{ad_{\underline{f}}^{k_j}\underline{g}_j\}$ 均具常秩的前提下,文献[7]中定理 4.1 一定成立.

5 结束语

定理 3.1 给出了关于仿射非线性系统的非正则静态反馈线性化的一个充分条件. 该条件是可验证的,而且证明是构造性的. 利用该条件可以解决 $m = n - 1$ 情形的非正则静态反馈线性化问题. 例 4.1 指出定理中几个常秩性条件是必要的,由此指出并改正了文献[7]中定理 4.1 所存在的错误.

对于非正则状态反馈线性化问题,还有许多方面有待研究. 例如,如何完全刻划通过非正则反馈线性化的系统类,如何构造一个不能通过非正则反馈线性化的系统的最大能控线性化子系统,等等,这些无疑都是具有挑战性的新课题.

参 考 文 献

[1] Krener, A. J.. On the Equivalence of Control Systems and the Linearization of Nonlinear Systems. SIAM J. Control, 1973, 11: 670—676

[2] Brockett, R. W.. Feedback Invariants for Nonlinear Systems. Proc. Ⅶ IFAC Congress, Helsinki, 1978, 1115—1120

[3] Jakubczyk, B. and Respondek, W.. On Linearization of Control Systems. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math., 1980, 28: 517—522

[4] Hunt, L. R., et al.. Design for Multi-Input Nonlinear Systems. in Differential Geometric Control Theory, R. Brock

ett, et al. (eds.), Birkhauser, Basel, 1983, 286—298

[5] Krener, A. J., et al.. Partial and Robust Linearization by Feedback. Proc. of 22ed IEEE CDC, San Antonio, Texas, 1983, 126—130

[6] Marino, R.. On the Largest Feedback Linearizable Subsystem. Sys. Control Lett., 1986, 6: 345—351

[7] Charlet, B., Levine, J. and Marino, R.. On Dynamic Feedback Linearization. Sys. Control Lett., 1989, 13: 143—151

[8] Charlet, B., Levine, J. and Marino, R.. Sufficient Conditions for Dynamic State Feedback Linearization. SIAM J. Control Optim., 1991, 29: 38—57

[9] Marino, R.. Static and Dynamic Feedback Linearization of Nonlinear Systems. in Perspectives in Control Theory, B. Jakubczyk, et al. (eds.), Birkhauser, Basel, 1990, 249—260

[10] 孙振东，夏小华，高为炳. 关于非线性系统非正则线性化的一些初步结果. 中国控制会议论文集，太原，1994，308—313

A Sufficient Condition for Nonregular Static Feedback Linearization

SUN Zhendong and XIA Xiaohua

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics · Beijing, 100083, PRC)

Abstract: In this paper, we present a sufficient condition for nonregular static state feedback linearization. A counterexample is given.

Key words: Affine nonlinear systems; regular feedback linearization; nonregular static feedback linearization

本文作者简介

孙振东 1968年生. 1990年毕业于青岛海洋大学应用数学系，1993年于厦门大学系统科学系获硕士学位，现为北京航空航天大学七研博士生. IEEE学生会员. 目前的研究方向为非线性控制系统的综合设计理论，线性系统的几何方法.

夏小华 1963年生，北京航空航天大学七研教授，博士生导师. IEEE会员. 感兴趣的研究领域包括非线性控制系统理论等.