第13卷第1期
1996年2月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 1
Feb., 1996

多变量系统鲁棒稳定性

庞国仲　孙丽华　刘　军　薛福珍

(中国科学技术大学自动化系·合肥,230026)

摘要：本文用复变函数理论,证明了摄动系统为鲁棒对角优势,则系统一定是鲁棒稳定这个一般性结论.该结论保守性小,与奈氏阵列法联系密切,可用于工业对象鲁棒控制系统设计.

关键词：鲁棒对角优势；鲁棒预补偿器；多输入多输出系统

1 引　言

以奈氏阵列法为基础,形成了解耦鲁棒理论.文献[1]首次引入鲁棒对角优势概念.文献[2]证明了鲁棒对角优势保证鲁棒稳定这个一般性结论.但是,该定理证明需较深的数学基础,过程又较烦,难为工程技术人员掌握.为把解耦鲁棒理论更好地用于工程实际,本文提出了证明该结论的简单方法.基于该结论,提出一种鲁棒系统设计方法.实例设计表明该方法实用有效.

2 奈氏阵列法

图1为多变量反馈系统,其中 $\theta(s)\in R(s)^{m\times m}$ 为正则有理传递函数矩阵,$F=\operatorname{diag}\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{f_i\}$,$f_i\in \mathrm{R}$ 为反馈增益矩阵.

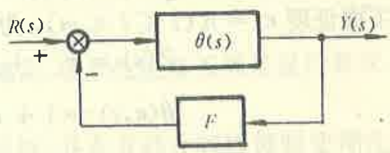

图1　多变量反馈系统

引理1[3]　在图1所示系统中,若 $(F^{-1}+\theta(s))$ 在 D 上为对角优势,则 $\det[F^{-1}+\theta(s)]$ 轨迹包围原点次数 N 等于其对角元 $(f_i^{-1}+q_{ii}(s))$ 轨迹包围原点次数 n_i 之和,即

$$N=\sum_{i=1}^{m}n_i. \tag{1}$$

定理1[3]　对于图1所示系统,若 $(F^{-1}+\theta(s))$ 在 D 上为对角优势,则闭环系统稳定的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{m}n_i=-n_0. \tag{2}$$

其中 n_0 为开环系统不稳定极点数.

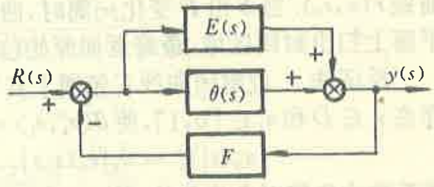

图2　加法摄动系统

3 鲁棒稳定性定理

图2为多变量摄动系统,其中 $E(s)\in R(s)^{m\times m}$ 为 $\theta(s)$ 的结构性加法摄动矩阵,且在如下意义下有界：

$$|e_{ij}(s)|\leqslant|r_{ij}(s)|<\infty\quad(1\leqslant i,j\leqslant m),\quad\forall s\in D,$$

本文于1994年1月5日收到.1995年6月10日收到修改稿.

即满足 $$|E(s)| \leqslant |R(s)|. \quad \forall\, s \in D.$$

实际系统传递函数矩阵为 $$\tilde{\theta}(s) = \theta(s) + E(s).$$

定义 1[1]（鲁棒对角优势） 若 $(F^{-1}+\theta(s))$ 在 D 上为行或列对角优势的，且满足

$$|f_i^{-1} + q_{ii}(s)| - |e_{ii}(s)| > \sum_{j\neq i}^{m}(|q_{ij}(s)| + |e_{ij}(s)|) \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{3}$$

或 $$|f_i^{-1} + q_{ii}(s)| - |e_{ii}(s)| > \sum_{j\neq i}^{m}(|q_{ji}(s)| + |e_{ji}(s)|) \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{4}$$

则称图 2 所示系统为行或列鲁棒对角优势，

定理 2 在图 2 所示系统中，若 $(F^{-1}+\theta(s))$ 在 D 上为对角优势，且在 D 上为鲁棒对角优势，则

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i = N' = \sum_{i=1}^{m} n_i'. \tag{5}$$

其中，N' 为 $\det[F^{-1}+\tilde{\theta}(s)]$ 轨迹包围原点次数；n_i' 为 $[F^{-1}+\tilde{\theta}(s)]$ 对角元 $(f_i^{-1}+\tilde{q}_{ii}(s))$ 轨迹包围原点次数.

证 $(F^{-1}+\theta(s))$ 为对角优势的，有

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i. \tag{6}$$

$(F^{-1}+\tilde{\theta}(s))$ 为鲁棒对角优势的，故

$$N' = \sum_{i=1}^{m} n_i'. \tag{7}$$

下面证明 $n_i = n_i'(1 \leqslant i \leqslant m)$，为此定义矩阵和函数

$$Z(s) = F^{-1} + \theta(s),$$

$$\beta(\alpha,s) = 1 + \alpha\frac{e_{ii}(s)}{z_{ii}(s)}, \quad \forall\, i \in [1,m], \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{8}$$

$Z(s)$ 为对角优势，而 $e_{ii}(s)$ 有界，故 $e_{ii}(s)/z_{ii}(s)$ 在 D 上没有极点，因此，$\beta(\alpha,s)$ 在 D 上均为有限值.

取 $\alpha=1$，$\beta(1,s)$ 将 D 映射为复平面上封闭曲线 Γ，如图 3 所示，取 $s_0 \in D$，$\beta(1,s_0)$ 为 Γ 上点 A，又 $\beta(0,s_0)=1$. 当 α 在区间 $[0,1]$ 变化时，得到由 1 到 A 连续曲线 $r(\alpha,s_0)$. 当 S 沿 D 变化一周时，曲线 $r(\alpha,s_0)$ 在复平面上扫出封闭区域，最终返回原始位置.

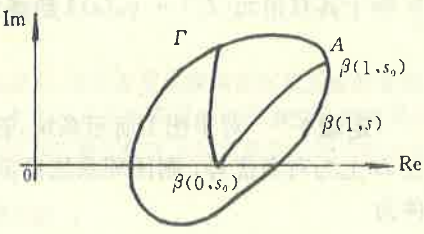

图 3 $\beta(\alpha,s)$ 的图象

反证法 设封闭曲线 Γ 包围了复平面原点，表明存在 $s_1 \in D$ 和 $\alpha_1 \in [0,1]$，使 $\beta(\alpha_1,s_1)=0$. 由式(8)得

$$|z_{ii}(s_1)| = \alpha_1|e_{ii}(s_1)|. \tag{9}$$

该系统为鲁棒对角优势的，故

$$|z_{ii}(s_1)| > |e_{ii}(s_1)| \geqslant \alpha_1(e_{ii}(s_1))|. \tag{10}$$

可见，封闭曲线 Γ 不可能包围复平面原点，故

$$\beta(1,s) = 1 + \frac{e_{ii}(s)}{z_{ii}(s)} = \frac{f_i^{-1}+\tilde{q}_{ii}(s)}{f_i^{-1}+q_{ii}(s)} \neq 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \quad \forall\, s \in D. \tag{11}$$

由幅角原理得 $n_i' - n_i = 0$，于是

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i = N' = \sum_{i=1}^{m} n_i',$$

证毕.

定理 3 在图 2 所示系统中，设名义系统 $\theta(s)$ 与实际系统 $\tilde{\theta}(s)$ 的不稳定极点数相同，若满足：

1) 名义系统闭环稳定；

2) $(F^{-1}+\theta(s))$ 在 D 上为对角优势的；

3) 摄动系统在 D 上为鲁棒对角优势的，则摄动系统闭环稳定，即系统鲁棒稳定.

证 名义系统闭环稳定，由定理 1 得

$$\sum_{i=1}^{m} n_i + n_0 = 0.$$

摄动系统为鲁棒对角优势，由引理 1 得

$$n_c' = n_0' + \sum_{i=1}^{m} n_i'. \tag{12}$$

其中 n_c' 和 n_0' 分别为摄动系统闭环和开环极点位于 D 内的个数. 已知 $n_0 = n_0'$. 定理 2 已证明 $\sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} n_i'$，故 $n_c' = 0$. 因此，摄动系统闭环稳定. 证毕.

该定理表明，若名义系统闭环稳定，摄动系统又为鲁棒对角优势的，则摄动系统鲁棒稳定.

4 鲁棒系统设计方法

基于本文结论和奈氏陈列法，提出一种鲁棒系统设计方法. 设计步骤如下：

1) 根据广义对象特性确定名义模型 $G(s)$.

2) 用动态预补偿方法[4]，设计鲁棒预补偿器 $K_R(s)$，并检验系统是否为鲁棒对角优势.

3) 根据 $\theta(s) = G(s)K_R(s)$ 对角元频率特性，用单变量理论设计控制器 $K_C(s) = \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{diag}}\{k_{ci}(s)\}$，使名义系统稳定.

4) 作诸闭环系统单位阶跃响应，检验系统是否鲁棒稳定，各项性能是否满足设计要求.

5 实 例

控制对象为大型加热炉，它是强关联两输入两输出系统，并有非线性和缓慢时变特性，因而有明显参数不确定性. 用试验方法建模，得到大修前、后和运行中期的数学模型.

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.6}{2400s^2+85s+1} & \dfrac{-0.1}{3360s^2+110s+1} \\ \dfrac{-1.1}{70s+1} & \dfrac{0.6}{80s+1} \end{bmatrix},$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.6}{2400s^2+85s+1} & \dfrac{-0.04}{3000s^2+90s+1} \\ \dfrac{-1.1}{70s+1} & \dfrac{0.3}{70s+1} \end{bmatrix},$$

$$G_3(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.4}{3800s^2+120s+1} & \dfrac{-0.1}{3000s^2+70s+1} \\ \dfrac{-0.87}{50s+1} & \dfrac{0.5}{60s+1} \end{bmatrix}.$$

选取 $G_2(s)$ 为广义对象名义模型.

用动态预补偿方法设计鲁棒预补偿器

$$K_R(s) = \begin{pmatrix} 1.0+12.68s & -0.0407-24.60s \\ 2.08+30.07s & 1.0-33.08s \end{pmatrix}.$$

取 F 为单位阵，在系统工作频率范围内，画出摄动系统鲁棒优势度曲线，如图 4 所示，可以看出，该系统为鲁棒对角优势的.

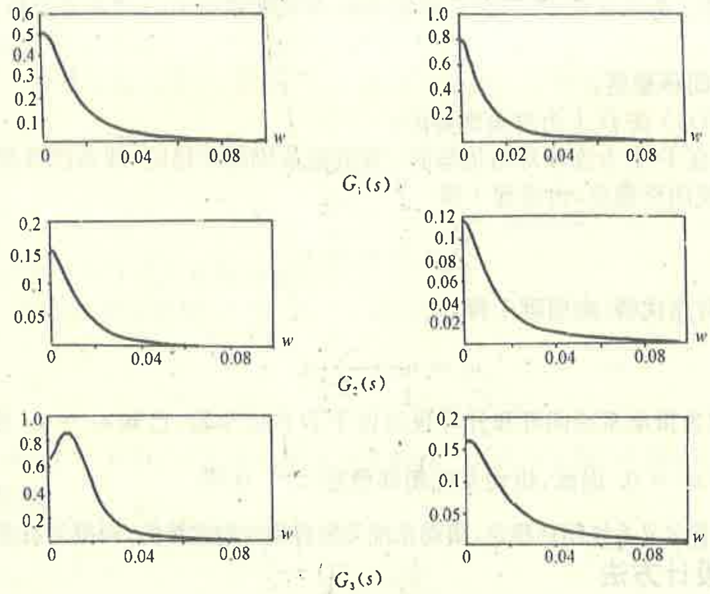

图 4 鲁棒优势度曲线

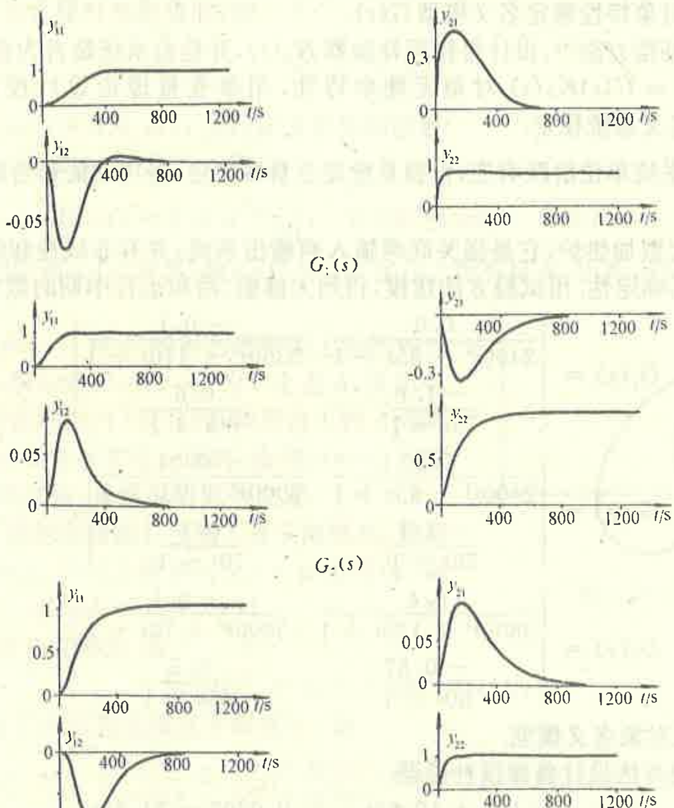

图 5 闭环系统单位阶跃响应

对名义系统,用单变量理论设计控制器

$$K_C(s) = \mathrm{diag}\{1.24 + 0.018/s, 1.14 + 0.016/s\}$$

使名义系统稳定，而且有良好性能.

由定理3可知该系统鲁棒稳定.

作诸闭环系统单位阶跃响应，如图5所示，可见，该系统鲁棒稳定，且有良好鲁棒性能.

6 结 论

1）本文证明方法与文献[2]相比有如下优点：证明过程简单，概念清楚，所用数学知识少而浅，易于工程技术人员接受.

2）本文定理2包含了奈氏阵列法引理1，因而揭示了解耦鲁棒理论与奈氏阵列法的内在联系.

参 考 文 献

[1] Arkun, Y., Manousiouthakis, B. and Putz, P.. Robust Nyquist Array Methodlogy: A New Theoretical Framework for Analysis and Design of Robust Multivariable Feedback Systems. Int. J. Control, 1984, 40(4): 603--629

[2] 庞国仲、陈振跃. 鲁棒稳定性和鲁棒对角优势的关系. 自动化学报, 1992, 18: 273—281

[3] Rosenbrock, H. H.. Design of Multivariable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array. Proc, IEE., 1969, 116: 1929—1936

[4] 庞国仲，刘军，向有敏. 动态鲁棒预补偿器设计方法. 中国科学技术大学学报, 1994, (3): 290—295

Robust Stability Study for Multivariable System

PANG Guozhong, SUN Lihua, LIU Jun and XUE Fuzhen

(Department of Automation, University of Science and Technology of China • Hefei, 230027, PRC)

Abstract: This paper, using complex function theory, proves the general conclusion that the system must be robust stable if its perturbed system is robust diagonal dominance. The conclusion is less conservative, and has close relation with Nyquist Array method, thus it can be applied to robust control system design for practical industrial plants.

Key words: robust diagonal dominance; robust precompensator; multi-input multi-output system.

本文作者简介

庞国仲 1938年生. 1963年毕业于中国科学技术大学，并留校任教. 现为教授. 从事控制理论、控制工程、控制系统计算机辅助设计研究工作. 已发表学术论文近五十篇，著作三部，有五项科研成果分别获中国科学院、国家教委、中国石化总公司和安徽省科技进步奖.

孙丽华 1967年生. 1990年毕业于中国科学技术大学自动化系，1993年获本校控制理论与应用硕士学位. 曾两次获本校张宇植奖学金，现在华伟公司任职.

刘军 1965年生. 1989年毕业于中国科学技术大学自动化系，1992年获本校控制理论与应用硕士学位. 曾获中国科学院院长奖学金和本校张宗植奖学金. 现为中国科学技术大学计算机软件博士研究生. 主要从事计算机控制理论与应用的研究.

薛福珍 1949年生. 1975年毕业于中国科学技术大学，1992年获本校控制理论与应用硕士学位. 主要从事控制理论、控制系统计算机辅助设计研究工作. 曾获1993年国家教委科技进步二等奖.