第 13 卷第 1 期
1996 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 1
Feb., 1996

带有参数不确定的线性时变系统的鲁棒 H_∞ 滤波

王朝珠　谈　侃
(中国科学院系统科学研究所·北京，100080)

摘要：本文讨论了带有参数不确定的线性时变系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题，同时给出了一种鲁棒 H_∞ 滤波器的设计方法.

关键词：线性时变系统；不确定系统；鲁棒 H_∞ 滤波

1 引　言

对于给定的带有噪声的动态系统，其所谓最优 H_∞ 滤波问题是指为其设计一个滤波器，不但使得估计误差的动态系统内部稳定，而且使从噪声到估计误差之算子的 H_∞ 范数达到极小. 这里噪声是指具有有界能量的任意信号，即噪声是属于 $L_2[0,\infty)$ 的任意函数，特别当对噪声统计性不确切知道时，这种描述是适宜的. 但由于多变量动态系统的最优 H_∞ 滤波问题的讨论(类似于多变量动态系统的最优 H_∞ 控制问题)遇到难于克服的困难. 因此人们只得求其次优 H_∞ 滤波器，即设计一个滤波器，使得从噪声到估计误差之算子的 H_∞ 范数小于预先给定的值. 最早，[1]用多项式方法讨论了线性定常系统的次优 H_∞ 滤波，而后[2]用状态空间法讨论了线性时变系统的次优 H_∞ 滤波.

由于众所周知的原因，描述实际系统的模型中总是存在着某种不确定. 因此，在人们获得次优 H_∞ 滤波的设计方法之后，自然将注意力转向带有不确定系统的 H_∞ 滤波. 既然确定系统只能讨论其次优 H_∞ 滤波器，显然不确定系统的 H_∞ 滤波也只能讨论其次优 H_∞ 滤波器. 我们称带有不确定系统的次优 H_∞ 滤波器为鲁棒 H_∞ 滤波器. 所谓鲁棒 H_∞ 滤波问题是指为有不确定的系统设计一个滤波器，当系统参数在允许范围内变化时，不但使得估计误差的动态系统内部稳定，而且从噪声到估计误差的算子的 H_∞ 范数满足指定要求. [3][4]分别就带有参数不确定的周期系统和一类非常特别的非线性系统(确定部分为在一定常系统上加一个状态的非线性项. 其不确定部分只是一个时变的不确定项，而非线性部分没有不确定性.)讨论了其鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题.

本文主要讨论带有参数不确定的线性时变系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题.

2 问题的叙述和预备知识

给定带有参数有确定的线性时变系统($\sum$)：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(t) + \Delta A(t)]x(t) + B(t)w(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) = [C(t) + \Delta C(t)]x(t) + D(t)w(t), \\ z(t) = L(t)x(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 7 月 6 日收到. 1994 年 12 月 20 日收到修改稿.

其中 $x(t)\in\mathrm{R}^n$ 是状态,$w(t)\in\mathrm{R}^r$ 是噪声信号,$w(t)\in L_2[0,\infty)$,$y(t)\in\mathrm{R}^m$ 是量测输出,$z(t)\in\mathrm{R}^p$ 是被估计量. $A(t),B(t),C(t),D(t),L(t)$ 皆是以 t 的分段连续函数为元的有界实矩阵,且 $D(t)D^{\mathrm{T}}(t)$ 为满秩方阵.

$\Delta A(t),\Delta C(t)$ 分别表示 $A(t),C(t)$ 的不确定性,具有如下形式:

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\\ \Delta C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_1(t)\\ H_2(t)\end{bmatrix}F(t)E(t). \tag{2.2}$$

其中 $H_1(t),H_2(t),E(t)$ 皆是以 t 的分段连续函数为元的有界实矩阵,而 $F(t):R\to\mathrm{R}^{i\times j}$ 表示不确定性,其元是 L 可测的,且满足:

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I_j,\quad \forall\, t\in[0,\infty). \tag{2.3}$$

记 $z_e(t)$ 为 $z(t)$ 的估计值,$e(t)=z(t)-z_e(t)$ 是估计误差,设滤波器方程为

$$z_e(t)=\mathscr{F}\{y_t\}.$$

其中 $y_t=\{y(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t\}$ 是系统的量测,$\mathscr{F}$ 是待设计的滤波器(相当于一个算子).

定义 1[5] 给定系统

$$\dot{x}(t)=[A(t)+\Delta A(t)]x(t). \tag{2.4}$$

其中 $A(t),\Delta A(t)$ 如前. 如果存在一个正定一致有上、下界矩阵 $P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)>0$ (即存在 $\alpha>0,\beta>0$,使得 $\beta I\geqslant P(t)\geqslant\alpha I,\forall\, t\in[0,\infty)$),使得对所有容许的 $\Delta A(t)$ 有

$$\dot{P}(t)+[A(t)+\Delta A(t)]^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)[A(t)+\Delta A(t)]<0,$$

则称系统(1.4)是二次稳定的.

定义 2 给定系统(2.1)和 $\gamma>0$,如果滤波器 $\mathscr{F}$ 能使得误差动态系统是内部二次稳定的,且对任意的非零噪声 $w(t)\in L_2[0,\infty)$ 和满足(2.2)(2.3)的 $\Delta A(t),\Delta C(t)$,皆有

$$\|e\|_2<\gamma\|w\|_2,$$

则称 $\mathscr{F}$ 为系统(2.4)的鲁棒 H_∞ 滤波器.

当 $\Delta A(t)=0,\Delta C(t)=0$ 时,系统(2.1)变为

$$(\Sigma_1):\quad\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)w(t), & x(0)=0,\\ y(t)=C(t)x(t)+D(t)w(t),\\ z(t)=L(t)x(t).\end{cases} \tag{2.5}$$

记

$$J(z,w)=\sup_{\substack{w\in L_2[0,\infty)\\ w\neq 0}}\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \tag{2.6}$$

定义 3[5] 给定以 t 的分段连续函数为元的有界实矩阵 $A(t)$. 设 $\Phi(t,\tau)$ 为对应 $A(t)$ 的基本解阵. 如果存在 $\alpha,\beta>0$ 使得:

$$\|\Phi(t,\tau)\|\leqslant\alpha e^{-\beta(t-\tau)},\quad t\geqslant\tau,$$

则称系统(2.5)是内部指数稳定的,或简称 $A(t)$ 是指数稳定的.

引理 1[5] 给定系统(2.5),对任给的正数 $\gamma>0$,如下叙述等价:

1) $A(t)$ 是指数稳定的,且 $J(z,w)<\gamma^2$;

2) 存在有界的非负定阵 $P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$ 满足:

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+\gamma^{-2}P(t)B(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)+L^{\mathrm{T}}(t)L(t)=0.$$

且 $(A(t)+\gamma^{-2}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t))$ 为指数稳定的.

引理 2[5] 给定系统(2.5),设 $(A(t),L(t))$ 是一致完全能观测的,对任给的正数 $\gamma>0$,如下叙述等价:

1) $A(t)$ 是指数稳定的,且 $J(z,w)<\gamma^2$;

2) 存在有界实正定阵 $Q(t)=Q^{\mathrm{T}}(t)\geqslant \alpha I,\alpha>0$,满足如下 RDI:

$$\dot{Q}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)Q(t)+Q(t)A(t)+\gamma^{-2}Q(t)B(t)B^{\mathrm{T}}(t)Q(t)+L^{\mathrm{T}}(t)L(t)<0.$$

定义 4 给定系统(2.5)和 $\gamma>0$,如果存在如下动态系统

$$\begin{cases}\dot{x}_e(t)=A(t)x_e(t)+K_e(t)(y(t)-C(t)x_e(t)), & x_e(0)=0,\\ z_e(t)=L(t)x_e(t).\end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $K_e(t)$ 是以 t 的分段连续函数为元的有界实矩阵,使得误差 $\tilde{x}=x(t)-x_e(t)$ 的动态系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=(A(t)-K_e(t)C(t))\tilde{x}(t)+(B(t)-K_e(t)D(t))w(t),\\ e(t)=z(t)-z_e(t)=L(t)\tilde{x}(t)\end{cases} \tag{2.8}$$

是内部指数稳定的,且

$$J(e,w)<\gamma^2,$$

则称(2.7)为系统(2.5)的具有噪声抑制指标 γ 的 H_∞ 滤波器

引理 3[1] 系统(2.5)存在具有噪声抑制指标 γ 的 H_∞ 滤波器(2.7)的充要条件是存在有界的非负定阵 $S(t)=S^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$ 满足:

$$\begin{aligned}&-\dot{S}(t)+(A(t)-B(t)D^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)C(t))S(t)+S(t)(A(t)-B(t)D^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)C(t))^{\mathrm{T}}\\ &+S(t)(\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}(t)L(t)-C^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)C(t))S(t)+B(t)(I-D^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)D(t))B^{\mathrm{T}}(t)=0,\end{aligned}$$

且使得 $[A(t)-B(t)D^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)C(t)+S(t)(\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}(t)L(t)-C^{\mathrm{T}}(t)R^{-1}(t)C(t))]$ 为指数稳定的.其中 $R(t)=D(t)D^{\mathrm{T}}(t)$.

如果满足上述条件的 $S(t)$ 存在,$K_e(t)=[S(t)C^{\mathrm{T}}(t)+B(t)D^{\mathrm{T}}(t)]R^{-1}(t)$.

引理 4 给定 $A(t)=\begin{bmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ 0 & A_{22}(t)\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$ 中 $A_{11}(t),A_{12}(t),A_{22}(t)$ 皆是以 t 的分段连续函数为元的有界实矩阵,如果 $A_{11}(t),A_{22}(t)$ 是指数稳定的,则 $A(t)$ 必是指数稳定的.

证 对应 $A(t)$ 的基本解阵为 $\Phi(t,\tau)=\begin{bmatrix}\Phi_{11}(t,\tau) & \Phi_{12}(t,\tau)\\ \Phi_{21}(t,\tau) & \Phi_{22}(t,\tau)\end{bmatrix}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}(t,\tau)}{\mathrm{d}t}=A_{11}(t)\Phi_{11}(t,\tau)+A_{12}(t)\Phi_{21}(t,\tau),\quad \Phi_{11}(\tau,\tau)=I_{n_1}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}(t,\tau)}{\mathrm{d}t}=A_{11}(t)\Phi_{12}(t,\tau)+A_{12}(t)\Phi_{22}(t,\tau),\quad \Phi_{12}(\tau,\tau)=0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}(t,\tau)}{\mathrm{d}t}=A_{22}(t)\Phi_{21}(t,\tau),\quad \Phi_{21}(\tau,\tau)=0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{22}(t,\tau)}{\mathrm{d}t}=A_{22}(t)\Phi_{22}(t,\tau),\quad \Phi_{22}(\tau,\tau)=I_{n_2}, \tag{2.12}$$

由(2.11)知 $\Phi_{21}(t,\tau)\equiv 0$,将其代入(2.9)中得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}(t,\tau)}{\mathrm{d}t}=A_{11}(t)\Phi_{11}(t,\tau),\quad \Phi_{11}(\tau,\tau)=I_{n_1},\tag{2.13}$$

由(2.13)和(2.12)知 $\Phi_{11}(t,\tau)$,$\Phi_{22}(t,\tau)$ 是分别对应于 $A_{11}(t)$,$A_{22}(t)$ 的基本解阵. 只要注意到 $\Phi_{12}(\tau,\tau)=0$, 由(2.10)易知

$$\Phi_{12}(t,\tau)=\int_\tau^t\Phi_{11}(t,\xi)A_{12}(\xi)\Phi_{22}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.\tag{2.14}$$

已知 $A_{11}(t)$,$A_{22}(t)$ 是指数稳定的,且 $A_{12}(t)$ 是有界的,因此必存在 $c_1>0$,$c_2>0$,$c_3>0$,$c_4>0$,$M>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\|\Phi_{11}(t,\tau)\|\leqslant c_1e^{-c_2(t-\tau)},\\&\|\Phi_{22}(t,\tau)\|\leqslant c_3e^{-c_4(t-\tau)},\\&\|A_{12}(t)\|\leqslant M.\end{aligned}\tag{2.15}$$

由(2.14)和(2.15)得

$$\begin{aligned}\|\Phi_{12}(t,\tau)\|&\leqslant\int_\tau^t\|\Phi_{11}(\xi,\tau)\|\ \|A_{12}(\xi)\|\ \|\Phi_{22}(\xi,\tau)\|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant c_1c_3Me^{-c_2t}e^{c_4\tau}\int_\tau^te^{(c_2-c_4)\xi}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{2.16}$$

当 $c_2-c_4\neq0$ 由(2.16)得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant\frac{c_1c_3M}{c_2-c_4}[e^{-c_4(t-\tau)}-e^{-c_2(t-\tau)}].\tag{2.17}$$

当 $c_2>c_4$ 时, 由(2.17)得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant\frac{c_1c_3M}{c_2-c_4}e^{-c_4(t-\tau)}.\tag{2.18}$$

当 $c_2<c_4$ 时, 由(2.17)得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant\frac{c_1c_3M}{c_4-c_2}e^{-c_2(t-\tau)}.\tag{2.19}$$

当 $c_2=c_4\neq0$ 时, 由(2.16)得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant c_1c_3Me^{-c_2(t-\tau)}(t-\tau).\tag{2.20}$$

由于

$$\begin{aligned}e^{-c_2(t-\tau)}(t-\tau)&=\frac{1}{\alpha}e^{-c_2(t-\tau)}\alpha(t-\tau)\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}e^{-c_2(t-\tau)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha(t-\tau))^i}{i!}=\frac{e^{-(c_2-\alpha)(t-\tau)}}{\alpha}.\end{aligned}$$

只要取 $\alpha<c_2$,且记 $\frac{1}{\alpha}=c_5$,$c_2-\alpha=c_6$, 则有

$$e^{-c_2(t-\tau)}(t-\tau)\leqslant c_5e^{-c_6(t-\tau)}.$$

将上式代入(2.20)中得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant c_1c_3Mc_5e^{-c_6(t-\tau)}.\tag{2.21}$$

由(2.15),(2.18),(2.19)和(2.21)知:必存在 $\sigma_1>0$,$\sigma_2>0$ 使得

$$\|\Phi_{12}(t,\tau)\|\leqslant\sigma_1e^{-\sigma_2(t-\tau)},\quad\forall\,t\geqslant\tau.$$

因此 $A(t)=\begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}$ 是指数稳定的.

3 鲁棒 H_∞ 滤波器的设计

下面讨论系统(2.1)的鲁棒 H_∞ 滤波器的设计问题,其鲁棒 H_∞ 滤波器的存在条件和设计方法都由如下定理给出.

定理 给定系统(2.1)和 $\gamma>0$,如果对某个 $\varepsilon>0$,下面三个条件均成立:

1) 存在有界的非负定阵 $P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$ 满足:

$$\begin{aligned}&\dot P(t)+P(t)A(t)+A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P(t)(\gamma^{-2}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)\\&\quad+\varepsilon^{-2}H_1(t)H_1^{\mathrm{T}}(t))P(t)+\varepsilon^2E^{\mathrm{T}}(t)E(t)=0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

且 $(A(t)+(\gamma^{-2}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_1(t)H_1^{\mathrm{T}}(t))P(t))$ 为指数稳定的.

2) 存在有界的非负定阵 $S(t)=S^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$ 满足:

$$\begin{aligned}&-\dot S(t)+(\hat A(t)-\hat B(t)\hat D^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat C(t))S(t)\\&+S(t)(\hat A(t)-\hat B(t)\hat D^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat C^{\mathrm{T}}(t))\\&+S(t)(\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}(t)L(t)-\hat C^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat C(t))S(t)\\&+\hat B(t)(I-\hat D^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat D(t))\hat B^{\mathrm{T}}(t)=0,\quad S(0)=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

且使得 $[\hat A(t)-\hat B(t)\hat D^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat C(t)+S(t)(\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}(t)L(t)-\hat C^{\mathrm{T}}(t)\hat R^{-1}(t)\hat C(t))]$ 为指数稳定的.

其中

$$\begin{cases}\hat A(t)=A(t)+\Delta A_e(t),\\ \hat C(t)=C(t)+\Delta C_e(t),\\ \Delta A_e(t)=(\gamma^{-2}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_1(t)H_1^{\mathrm{T}}(t))P(t),\\ \Delta C_e(t)=(\gamma^{-2}D(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_2(t)H_1^{\mathrm{T}}(t))P(t),\\ \hat B(t)=\left[B(t),\dfrac{\gamma}{\varepsilon}H_1(t)\right],\\ \hat D(t)=\left[D(t),\dfrac{\gamma}{\varepsilon}H_2(t)\right],\\ \hat R(t)=\hat D(t)\hat D^{\mathrm{T}}(t).\end{cases}\tag{3.3}$$

3) $\left(A_c(t),\begin{pmatrix}\varepsilon E(t) & 0\\ 0 & L(t)\end{pmatrix}\right)$ 是一致完全能观测的,其中

$$\begin{cases}A_c(t)=\begin{bmatrix}A(t) & 0\\ -(\Delta A_e(t)-\hat K_e(t)\Delta C_e(t)) & A(t)+\Delta A_e(t)-\hat K_e(t)(C(t)+\Delta C_e(t))\end{bmatrix},\\ \hat K_e(t)=[S(t)\hat C^{\mathrm{T}}(t)+\hat B(t)\hat D^{\mathrm{T}}(t)]\hat R^{-1}(t).\end{cases}\tag{3.4}$$

则一定存在鲁棒 H_∞ 滤波器,且具有如下形式:

$$\begin{cases}\dot x_e(t)=\hat A(i)x_e(t)+\hat K_e(t)[y(t)-\hat Cx_e(t)],\quad x_e(0)=0,\\ z_e(t)=L(t)x_e(t).\end{cases}\tag{3.5}$$

证 下面证明(3.5)是系统(2.1)的鲁棒 H_∞ 滤波器. 为此,只要注意到(3.3)和(3.4),易知(3.5)为

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = (A(t) + \Delta A_e(t))x_e(t) + \hat{K}_e(t)(y(t) - (C(t) + \Delta C_e(t))x_e(t)), \\ z_e(t) = L(t)x_e(t), \quad x_e(0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

联合(2.1)和(3.6),记 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_e(t)$, 得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = [A(t) + \Delta A_e(t) - \hat{K}_e(t)(C(t) + \Delta C_e(t))]\tilde{x}(t) \\ \qquad + [(\Delta A(t) - \Delta A_e(t)) - \hat{K}_e(t)(\Delta C(t) - \Delta C_e(t))]x(t) \\ \qquad + [B(t) - \hat{K}_e(t)D(t)]w(t), \quad \tilde{x}(0) = 0, \\ z_e = L(t)(x(t) - \tilde{x}(t)). \end{cases} \tag{3.7}$$

联合(2.1)和(3.7),记 $\eta(t) = [x^{\mathrm{T}}(t), \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}, e(t) = z(t) - z_e(t)$, 且注意到(2.2)和(3.4)得

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = [A_c(t) + H_c(t)F(t)E_c(t)]\eta(t) + B_c(t)w(t), \\ e(t) = C_c(t)\eta(t), \quad \eta(0) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

其中

$$B_c(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ B(t) - \hat{K}_e(t)D(t) \end{bmatrix}, \quad H_c(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_1(t) - \hat{K}_e(t)H_2(t) \end{bmatrix},$$
$$E_c = [E, 0], \quad C_c = [0, L(t)]. \tag{3.9}$$

由定理的条件(1)知存在非负定有界阵 $P(t) = P^{\mathrm{T}}(t) \geqslant 0$,因此(3.3)式中的 $\hat{A}(t), \hat{B}(t), \hat{C}(t), \hat{D}(t)$ 都是确定的,利用它们构造如下系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \hat{A}(t)\xi(t) + \hat{B}(t)\hat{w}(t), \quad \xi(0) = 0, \\ \hat{y}(t) = \hat{C}(t)\xi(t) + \hat{D}(t)\hat{w}(t), \\ \hat{z}(t) = L(t)\xi(t). \end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $\hat{w}(t) \in L_2(0, \infty), \hat{w}(t) \in \mathrm{R}^{(r+i)}$.

由定理的条件(2)和引理3知道系统(3.10)必存在具有噪声抑制指标 γ 的 H_∞ 滤波器

$$\begin{cases} \dot{\xi}_e(t) = \hat{A}(t)\xi_e(t) + \hat{K}_e[\hat{y}(t) - \hat{C}(t)\xi_e(t)], \\ z_e(t) = L(t)\xi_e(t), \quad \xi_e(0) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $\hat{K}_e = [S(t)\hat{C}(t) + \hat{B}(t)\hat{D}^{\mathrm{T}}(t)]\hat{R}^{-1}(t)$.

记 $\tilde{\xi} = \xi(t) - \xi_e(t), \tilde{z}(t) = \hat{z}(t) - z_e(t)$, 则由(3.10)和(3.11)得误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}} = (\hat{A}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{C}(t))\tilde{\xi}(t) + (\hat{B}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{D}(t))\hat{w}(t), \\ \tilde{Z}(t) = L(t)\tilde{\xi}(t), \quad \tilde{\xi}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

由定义4知 $(\hat{A}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{C}(t))$ 是指数稳定的且

$$J(\hat{z}, \hat{w}) < \gamma^2.$$

将引理1应用到系统(3.12)知:必存在有界非负定阵 $Q(t) = Q^{\mathrm{T}}(t) \geqslant 0$ 使

$$\begin{aligned} &\dot{Q}(t) + (\hat{A}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{C}(t))^{\mathrm{T}}Q(t) + Q(t)(\hat{A}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{C}(t)) \\ &\quad + \gamma^{-2}Q(t)(\hat{B}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{D}(t))(\hat{B}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{D}(t))^{\mathrm{T}}Q(t) \\ &\quad + L^{\mathrm{T}}(t)L(t) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

且 $\hat{A}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{C}(t) + \gamma^{-2}(\hat{B}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{D}(t))(\hat{B}(t) - \hat{K}_e(t)\hat{D}(t))^{\mathrm{T}}Q(t)$ 是指数稳定的.

对由定理条件(1)给定的 $P(t)$ 和满足(3.13)的 $Q(t)$，取 $X(t)=\begin{bmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q(t) \end{bmatrix}$，联合定理的条件(1)和(3.13)且注意到(3.3)，(3.4)，(3.9)得

$$\dot{X}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X(t)A_c(t)+X(t)(\gamma^{-2}B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_c(t)H_c^{\mathrm{T}}(t))X(t)+C_c^{\mathrm{T}}(t)C_c(t)+\varepsilon^2E_c^{\mathrm{T}}(t)E_c(t)=0. \tag{3.14}$$

且

$$A_c(t)+(\gamma^{-2}B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_c(t)H_c^{\mathrm{T}}(t))X(t)\triangleq\begin{bmatrix} A_{11}^c(t) & A_{12}^c \\ 0 & A_{22}^c(t) \end{bmatrix}.$$

其中

$$A_{11}^c(t)=A(t)+(\gamma^{-2}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_1(t)H_1^{\mathrm{T}}(t))P(t),$$
$$A_{12}^c(t)=[\gamma^{-2}B(t)(B(t)-\hat{K}_c(t)D(t))^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-2}H_1(t)(H_1(t)-\hat{K}_c(t)H_2(t))^{\mathrm{T}}]Q(t),$$
$$A_{22}^c(t)=\hat{A}(t)-\hat{K}_c(t)\hat{C}(t)+\gamma^{-2}(\hat{B}(t)-\hat{K}_c(t)\hat{D}(t))(\hat{B}(t)-\hat{K}_c(t)\hat{D}(t))^{\mathrm{T}}Q(t).$$

已知 $A_{11}^c(t)$，$A_{22}^c(t)$ 是指数稳定的，且 $A_{12}^c(t)$ 是有界的，从引理4知：

$$A_c(t)+(\gamma^{-2}B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_c(t)H_c^{\mathrm{T}}(t))X(t)$$

是指数稳定的.

由于 $C_c^{\mathrm{T}}(t)C_c(t)+\varepsilon^2E_c^{\mathrm{T}}(t)E_c(t)=\begin{pmatrix} \varepsilon E(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \varepsilon E(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{pmatrix}$，依定理的条件(3)知 $\left(A_c(t),\begin{pmatrix} \varepsilon E(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{pmatrix}\right)$ 是一致完全能观测的，将引理3应用到(3.14)知道必存在具有上下界的正定矩阵 $Y(t)=Y^{\mathrm{T}}(t)>0$(即存在 $\alpha_1>0,\beta_1>0$，使得 $\alpha_1I_{2n}\leqslant Y(t)\leqslant\beta_1I_{2n}$)满足：

$$\dot{Y}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t)+Y(t)A_c(t)+Y(t)(\gamma^{-2}B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon^{-2}H_c(t)H_c^{\mathrm{T}}(t))Y(t)+C_c^{\mathrm{T}}(t)C_c(t)+\varepsilon^2E_c^{\mathrm{T}}(t)E_c(t)<0. \tag{3.15}$$

由于 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$，所以有

$$Y(t)H_c(t)F(t)E_c(t)+E_c^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)H_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}Y(t)H_c(t)H_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t)+\varepsilon^2E_c^{\mathrm{T}}(t)E_c(t).$$

记 $\bar{A}(t)=A_c(t)+H_c(t)F(t)E_c(t)$. 从上式和(3.15)得

$$\dot{Y}(t)+\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)Y(t)+Y(t)\bar{A}(t)+\gamma^{-2}Y(t)B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t)+C_c^{\mathrm{T}}(t)C_c(t)<0. \tag{3.16}$$

注意到 $\bar{A}(t)=A_c(t)+H_c(t)F(t)E_c(t)$，易知(2.8)变为

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t)=\bar{A}(t)\eta(t)+B_c(t)w(t), \\ e(t)=C_c(t)\eta(t). \end{cases} \tag{3.17}$$

由(3.16)得

$$\dot{Y}(t)+\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)Y(t)+Y(t)\bar{A}(t)<0.$$

注意到 $\alpha_1I_{2n}\leqslant Y(t)\leqslant\beta_1I_{2n}$，从定义1知误差动态系统(.17)是内部二次稳定的. 另外，由于 $\eta(0)=0,\eta(\infty)=0$，注意到(3.17)，得：

$$T(e,w)=\int_0^\infty(e^{\mathrm{T}}(t)e(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t))\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} [e^{\mathrm{T}}(t)e(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta^{\mathrm{T}}(t)Y(t)\eta(t))]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} [\eta^{\mathrm{T}}(t)(\dot{Y}(t) + \bar{A}^{\mathrm{T}}(t)Y(t) + Y(t)\bar{A}(t) + \gamma^{-2}Y(t)B_c(t)B_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t) + C_c^{\mathrm{T}}(t)C_c(t)]\eta(t)\mathrm{d}t$$

$$- \gamma^2\int_0^{\infty} [w(t) - \gamma^{-2}B_c^{\mathrm{T}}(t)Y(t)\eta(t)]^{\mathrm{T}}[w(t) - \gamma^{-2}B_c(t)Y(t)\eta(t)]\mathrm{d}t.$$

注意到(3.16)，从上式易知：

$$T(e,w) < 0.$$

即

$$\| e \|_2 \leqslant \gamma \| w \|_2.$$

综上所述，从定义 2 知道(3.5)是系统(2.1)的鲁棒 H∞滤波器. 从而定理得证.

注　定理告诉我们：求解系统(2.1)的鲁棒 H∞滤波问题转化成求解二个微分 Riccati 方程(3.1)和(3.2).

参 考 文 献

[1] Grimble, M. J. H. . H∞ Desigl of Optimal Linear Filters. in C. I. Byrnes. C. F. Martin and R. E. Saekseds. , Linear Circuits, Systems and Signal Processing: Theory and Application. 1988, North Holland, Amstedam, 533—540

[2] Nagpal, K. M. and Khargonekar, P. P. . Filterling and Smoothing in an H∞ Setting. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1991, AC-36: 152—166

[3] Xie Lihua, Carlos, E. S. and Fragoro, M. D. . H∞ Filtering for linear Perodic Systems with Parameter Uncertainty. Systems & Control Letters. 1991, 17: 343—350

[4] Souza, C. E. , Xie Lihua and Wang, Y. . H∞ Filtering for a Class of Uncertain Nonlinear Systems. Systems & Contol Letter. 1993, 20: 419—426

[5] 谈侃. 线性时变系统的鲁棒 H∞控制与滤波，中国科学院系统科学研究所硕士论文，1994

H∞ Filtering for Linear Time-Varying Systems with Parameter Uncertainty

WANG Chaozhu　and　TAN Kan

(Institute of Systems Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: In this paper, the robust H∞ filtering for time-varying systems with parameter uncertainty is discussed. A design method of robust H∞ filter is given.

Key words: linear time-varying systems; uncertainty systems; robust H∞ filter

本文作者简介

王朝珠　1936 年生. 1961 年毕业于天津大学数学物理系. 1961 年至 1979 年在中国科学院数学所工作. 1979 年后在中国科学院系统科学所工作. 现为研究员. 多年来主要从事导引、制导与控制、线性系统、广义动态系统，最优控制，Robust 控制器设计的理论和应用研究，先后发表论文 53 篇，专著 4 本.

谈　侃　1968 年生. 1994 年硕士生毕业于中国科学院系统科学研究所，现在香港科技大学攻读博士学位.