递推自适应极点配置算法

李俊民
(西安交通大学系统工程研究所,710049)

邢科义
(西安电子科技大学应用数学系,710071)

万百五
(西安交通大学系统工程研究所,710049)

摘要: 本文提出了一种递推自适应极点配置算法,证明了它的稳定性和收敛性. 该算法特点是在控制器参数的计算中利用一次迭代公式,使在线计算量大幅度减少;前馈环节保证它的渐近跟踪特性. 最后,仿真例子说明该算法的正确性.

关键词: 递推算法; 极点配置; 稳定性; 收敛性

1 引 言

自适应控制算法根据辨识器的不同而分为直接算法和间接算法. 直接算法由于需估计的参数比间接算法多一倍,且收敛性难于分析,大大限制了它的应用. 而间接算法得到大量研究,如[1~3],但间接算法需在线计算线性方程组,占用大量时间,使得它很难运用于采样周期较短的系统. 本文首先构造性地提出计算 Diophantine 方程的一次递推算法,由于它是一次迭代公式,使在线计算量大幅度减少;然后建立了递推自适应算法,分析了此算法的收敛性和稳定性. 在辨识算法中引入参数投影的修正策略避免了辨识模型零、极点相消,同时引入一个前馈环节,使该算法消除了稳态误差,且能跟踪任何有界期望输出.

在第二节中,推导了递推计算极点配置方程的算法;递推自适应控制算法在第三节提出;第四节证明该算法的稳定性及收敛性;最后,仿真例子在第五节给出,验证了该算法的正确性.

2 求解 Diophantine 方程的递推算法

考虑线性时不变 SISO 离散系统

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})\tilde{u}(t). \tag{1}$$

其中 $A(q^{-1}) = a_0 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n}$,假设 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 是互质多项式, q^{-1} 是后移算子, $y(t)$, $u(t)$ 分别为输出、输入. 采用如下控制器:

$$K(q^{-1})u(t) = -P(q^{-1})t(t) + Ey^*(t). \tag{2}$$

其中 E 为待定常数, $y^*(t)$ 是有界期望输出. 由(1)式、(2)式得闭环系统为

$$[A(q^{-1})K(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1})]y(t) = EB(q^{-1})y^*(t). \tag{3}$$

若令 $A^*(q^{-1})$ 是任意稳定的 $(2n-1)$ 次多项式,则存在两个 $(n-1)$ 次多项式 $P(q^{-1})$, $K(q^{-1})$, 使下式成立[2]:

$$A(q^{-1})K(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1}) = A^*(q^{-1}). \tag{4}$$

本文于 1994 年 8 月 16 日收到. 1995 年 3 月 6 日收到修改稿.

利用(4)式可以任意配置闭环多项式为 $A^*(q^{-1})$，其中 $A^*(q^{-1}) = a_0^* + a_1^* q^{-1} + \cdots + a_{2n-1}^* q^{-2n+1}$. 下面提出求解方程(4)的递推算法：

记 $A^* = [a_0^* \quad a_1^* \quad \cdots \quad a_{2n-1}^*]^\tau$, $P = [K_0 \quad K_1 \quad K_{n-1} \quad P_0 \quad P_1 \quad P_{n-1}]^\tau$.

(4)式给出如下方程组：

$$SP = A^*. \tag{5}$$

这里 S 是由 $A(q^{-1}), B(q^{-1})$ 形成的 Sylvester 结式，即为

$$S = \begin{bmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & a_0 & & b_1 & b_0 & \\ \vdots & a_1 & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots \\ & & \ddots & a_0 & & \ddots & b_0 \\ a_n & \cdots & a_1 & b_n & \cdots & b_1 \\ & a_n & \vdots & & b_n & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & & & a_n & & & b_n \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \triangleq \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{2n} \end{bmatrix}.$$

其中 S_i 是 S 的第 i 行($i = 1,2,\cdots,2n$)，(5)式写为分量形式为

$$S_i P = a_i^*, \quad i = 1,2,\cdots,2n. \tag{6}$$

设初始值 $P(-1)$ 给定，极小化如下有约束的性能指标：

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{2}\|P(t) - P(t-1)\|^2; & t \geqslant 0, \\ \text{s.t.} \quad S_i P(t) = a_i^*, & i(t) = t \bmod (2n) + 1. \end{cases} \tag{7}$$

这里 $t \bmod (2n)$ 表示对 t 取 $2n$ 模运算. (7)式等价于极小化下面无约束性能指标：

$$\bar{J} = \frac{1}{2}\|P(t) - P(t-1)\|^2 + \lambda(S_{i(t)}P(t) - a_{i(t)}^*). \tag{7'}$$

由 $\dfrac{\partial \bar{J}}{\partial P(t)} = 0$ 及 $\dfrac{\partial \bar{J}}{\partial \lambda} = 0$ 得到如下一步递推算法：

$$\begin{gathered} P(t) = P(t-1) - \frac{S_i^\tau (S_i P(t-1) - a_i^*)}{S_i S_i^\tau}, \\ i = t \bmod (2n) + 1, \quad t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8}$$

定理 1 若 $A(q^{-1}), B(q^{-1})$ 互质，则 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P = S^{-1}A^*$.

证　记 $\qquad e_i(t) = a_i^* - S_i P(t-1), \tilde{P}(t) = P - P(t).$

由(8)式得

$$P(t) = P(t-1) + \frac{S_i^\tau e_i(t)}{S_i S_i^\tau},$$

则有

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}(t-1) - \frac{S_i^\tau e_i(t)}{S_i S_i^\tau}.$$

由(6)式

$$e_i(t) = S_i \tilde{P}(t-1),$$

因此

$$\|\tilde{P}(t)\|^2 = \|\tilde{P}(t-1)\|^2 - \frac{e_i^2(t)}{S_i S_i^\tau}$$

$$\leqslant \| \widetilde{P}(t-1) \|^2 - \frac{e_l^2(t)}{M}.$$

这里 $M = \max\limits_{1\leqslant l\leqslant 2n} \{S_l S_l^\tau\}$，所以

$$\| \widetilde{P}(t) \|^2 - \| \widetilde{P}(0) \|^2 \leqslant - \frac{1}{M}\sum_{\tau=1}^{t} e_{i(\tau)}(\tau).$$

若设 $\| \widetilde{P}(0) \|^2 < +\infty$，则有

$$\lim_{t\to\infty} e_{i(t)}(t) = 0.$$

由(8)式得

$$\| P(t) - P(t-1) \|^2 = \frac{e_l^2(t)}{S_l S_l^\tau} \leqslant \frac{e_l^2(t)}{M_1}, \quad (M_1 = \min_{1\leqslant l\leqslant n}\{S_l S_l^\tau\}).$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} \| P(t) - P(t-1) \|^2 = 0,$$

当 $j < +\infty$ 时，易知 $\lim\limits_{t\to\infty} \| P(t) - P(t-j) \|^2 = 0$，

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \lim_{t\to\infty}[a_{i(t)}^* - S_{i(t)}P(t-j)] \\
&= \lim_{t\to\infty}[a_{i(t)}^* - S_{i(t)}P(t-1) + S_{i(t)}(P(t-1) - P(t-j))] \\
&= \lim_{t\to\infty}[a_{i(t)}^* - S_{i(t)}P(t-1)] + \lim_{t\to\infty} S_{i(t)}(P(t-1) - P(t-j)) \\
&= 0, \quad (j < +\infty).
\end{aligned}$$

对于固定 $l(1 \leqslant l \leqslant 2n)$，有

$$\lim_{t\to\infty}[a_l^* - S_l P(t-1)] = 0,$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = P = S^{-1}A^*.$$

注　利用(8)式一次递推算法求解方程(5)，定理 1 已经证明了其解收敛于(5)式的唯一真解，它的计算量是 $3\times(2n)$ 次乘法、1 次除法及 $3\times(2n)$ 次加法；而用 Gauss 消去法求解方程(5)工所需计算量是 $(2n)^2$ 次乘法、$(2n)^2$ 次除法和 $(2n)^2$ 次加法．因此本文提出的算法计算量是很少的．

3　递推自适应极点配置算法

当系统(1)式的参数未知或慢时变时，采用如下递推最小二乘法来估计(1)的系统参数 $A(q^{-1}), B(q^{-1})$.

$$\hat\theta(t) = \hat\theta(t-1) + \frac{P(t-2)\varphi(t-1)}{1+\varphi^\tau(t-1)P(t-2)\varphi(t-1)}[y(t) - \varphi(t-1)^\tau\hat\theta(t-1)],$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\varphi(t-1)\varphi(t-1)^\tau P(t-2)}{1+\varphi(t-1)^\tau P(t-2)\varphi(t-1)}, \quad t \geqslant 1. \tag{9}$$

给定估计初值 $\hat\theta(0)$ 及任意一个正定阵 $P(-1)$. 其中 $\theta_0 = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n]^\tau$，$\hat\theta(t)$ 是 θ_0 在 t 时刻估计值. $\varphi(t-1) = [-y(t-1), -y(t-2), \cdots, -y(t-n), u(t-1), \cdots, u(t-n)]^\tau$ 记 $e(t) = y(t) - \varphi(t-1)^\tau\hat\theta(t-1)$，$\widetilde\theta(t-1) = \theta(t-1) - \theta_0$，则 $e(t) = -\varphi(t-1)^\tau\widetilde\theta(t-1)$.

定理 2　(9)式所列辨识算法具有如下特性[2]

i) $\| \hat\theta(t) - \theta_0 \|^2 \leqslant K_1 \| \hat\theta(0) - \theta_0 \|^2, t \geqslant 1.$

这里 $K_1 = [P(-1)]^{-1}$ 的条件数，即 $K_1 \triangleq \dfrac{\lambda_{\max}P(-1)^{-1}}{\lambda_{\min}P(-1)^{-1}}$.

ii) $\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{e^2(t)}{1+\varphi(t-1)^{\tau}P(t-2)\varphi(t-1)}<+\infty$,且

a) $\lim_{t\to\infty}\frac{e(t)}{[1+K_2\varphi(t-1)^{\tau}\varphi(t-1)]^{1/2}}=0,\quad K_2=\lambda_{\max}P(-1)$;

b) $\lim_{t\to\infty}\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-k)\|=0$,对任意有限数 k.

设 S_θ 是以 θ_0 为元素的已知凸集,每个元素 θ_0 对应的 $A(q^{-1}),B(q^{-1})$ 是互质的.若由(9)式得到 $\hat{\theta}(t)\notin S_\theta$,利用投影修正策略,使其属于 S_θ[2].

用(9)式辨识算法及其修正策略和第二节推出的一次递推求解 Diophantine 方程的算法,得到如下递推自适应极点配置算法:

步骤 1° 由(9)式估计系统参数 $\hat{A}(q^{-1}),\hat{B}(q^{-1})$.

步骤 2° 判别 $\hat{\theta}(t)$ 是否属于 S_θ,若是转下步;否则采用投影修正策略,使其属于 S_θ.

步骤 3° 用(8)式递推算法求解 Diophantine 方程,求得 $\hat{K}(q^{-1}),\hat{P}(q^{-1})$.

步骤 4° 由 $E=A^*(1)/\hat{B}(1)$,求得 E.

步骤 5° 由(2)式求出控制 $u(t)$,转步骤 1°.

4 算法的稳定性和收敛性

利用文[3]的结果来证明本算法的稳定性和收敛性.

定理 3 假定系统(1)式的阶的上界 n 已知,凸集 S_θ 已知且其中每个元素 θ 对应的 $A(q^{-1}),B(q^{-1})$ 是互质的,上节所列的递推自适应极点配置算法具有如下性质:

i) 算法是 BIBO 稳定的.即 $\{u(t)\},\{y(t)\}$ 对于所有 $t\geqslant 0$ 均有界.

ii) $\lim_{t\to\infty}[y(t)-y^*(t)]=0$.

证 由定理1和定理2可知 $P(t),\hat{\theta}(t)$,均是有界的,且易知文[3]中的条件 $A_1\sim A_4$ 均是满足的,本文算法(9)式具有如下性质① $\hat{\theta}(t)\in S_\theta$,② $\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-k)\|\in l^2,k<+\infty$,③ $\frac{e(t)}{[1+K_2\varphi(t-1)^{\tau}P(t-2)\varphi(t-1)]^{1/2}}\in l^2$,满足[3]中的 $E_1\sim E_3$.则由文[3]之定理3.1知:

i) 算法是 BIBO 稳定的,

ii) $\lim_{t\to\infty}e(t)=0$.

由估计模型及控制器方程得:

$$[\hat{A}(q^{-1})\hat{K}(q^{-1})+\hat{B}(q^{-1})\hat{P}(q^{-1})]y(t)=\hat{B}(q^{-1})Ey^*(t)+\hat{K}(q^{-1})e(t).$$

即

$$A^*(q^{-1})y(t)=\hat{B}(q^{-1})Ey^*(t)+\hat{K}(q^{-1})e(t).$$

由 E 的选取得:

$$\lim_{t\to\infty}[y(t)-y^*(t)]=0.$$

5 仿真研究

例 1 考虑非最小相位系统:

$(1-q^{-1}+q^{-2})y(t)=q^{-1}(1+2q^{-1})u(t)$,

仿真时取 $A^*(q^{-1})=1$, $y^*(t)$ 是周期为 40,幅值为 5 的方波函数,用本文算法完成仿真,其跟踪情况见图 1.

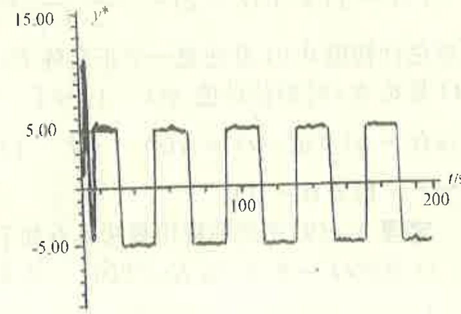

图 1 系统输出 $y(t)$ 跟踪期望输出 $y^*(t)$

例 2 考虑慢时变非最小相位系统[4]

$$(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y(t) = u(t-1) + \theta u(t-2).$$

其中 $\theta = \begin{cases} 0.50, & 1 \leqslant t \leqslant 100, \\ 0.55, & 100 < t \leqslant 200, \\ 0.65, & 200 < t \leqslant 300, \\ 0.70, & 300 < t \leqslant 400, \\ 0.90, & 400 < t \leqslant 500, \\ 1.2, & 500 < t \leqslant 1000. \end{cases}$

选择 $A^* = 1$，$y^*(t)$ 取为周期为 40，幅值为 5 的方波信号，仿真结果见图 2.

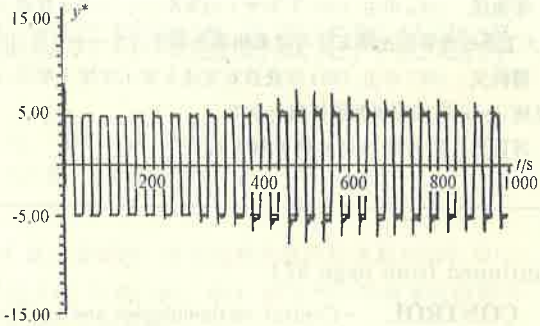

图 2 慢时变系统输出跟踪期望输出的情况

6 结 论

本文提出的递推自适应极点配置算法比以往的算法在计算量上大幅度减少，且具有 BIBO 稳定性和局部收敛性. 仿真结果表明，该算法不仅对非最小相位系统而且对慢时变非最小相位系统均得到满意的控制效果.

参 考 文 献

[1] Lozano, L. R. and Goodwin, G. C.. Globally Convergence Adaptive Pole Placement without a Persistency of Exitation Requirment. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(8);

[2] Goodwin, G. C. and Sin, G. S.. Adaptive Prediction, Filtering and Control. Prentice-Hall Inc, 1984

[3] Zhang, C. and Evans, R.. A. Stable Iterative Adaptive Control. IEEE Trans Automat. Contr., 1990, AC-35(1): 88—92

[4] 袁震东. 自适应控制理论及应用. 上海：化东师范大学出版社，1988

Recursive Adaptive Pole Placement Algorithm

LI Junmin

(Institute of System Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)

XING Keyi

(Department of Applied Methematics, Xidian University · Xi'an, 710071, PRC)

WAN Baiwu

(Institute of System Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: A recursive adaptive pole placement algorithm is presented in this paper. The stability and the convergence of the algorithm are respectively established. Since one-step iterative formulation in computing controller's parameters is used, the on-line computation cost is greatly reduced. The algorithm with the feedforward can follow an arbitrarily bounded output. Simulation examples show the efficiency of the algorithm.

Key words: recursive algorithm; pole placement; stability; convergence

本文作者简介

李俊民 1965年生.1990年毕业于西安电子科技大学获硕士学位,现为西安交通大学博士生.研究领域有自适应控制、大工业过程智能控制方法与应用和动态系统优化控制.

邢科义 1957年生.1994年获西安交通大学工学博士学位,现为西安电子科技大学副教授.研究领域有离散事件动态系统,Petri网理论和智能控制与应用.

万百五 见本刊1996年第1期第23页.

(continued from page 97)

CONTROL • Control methodologies and applications • Estimation, Identification and fault detection • Robust and adaptive control • Nonlinear control • Intelligent control • Process control • Motion control

EMERGING TECHNOLOGIES • Mechatronics • Virtual reality • Micro-electromechanical systems • Electric vehicle technology • Intelligent vehicle highway systems

ROBOTICS • Robot control • Mobile robots and navigation • Task planning • Intelligent sensors and actuators • Kinematics and simulation • Autonomous systems • Industrial applications

COMPUTER VISION • Image processing and interpretation • 2-D and 3-D scene analysis • Motion analysis and tracking • Pattern recognition and applications • Learning in computer vision • Parallel algorithms for computer vision • Applications of computer vision

NEURAL NETWORKS & FUZZY SYSTEMS

REAL-TIME SYSTEMS

SIGNAL PROCESSING & APPLICATIONS

Submission Procedure:

Submit three copies of abstract and extended summary, in English, formatted as follows. The first page should include the title, the name of the author, affiliation, mailing address, Fax number, e-mail address, preferred technical area, and a 100-words abstract. The second and succeeding pages should include the title and up to 1500-word extended summary. The description must be comprehensive enough to allow assessment of the work's originality and contributions.

Upon acceptance, authors will be required to register and present their papers. Papers will be published in the conference proceedings only if at least one of the authors is officially registered. The length of the final paper in the proceedings will be limited to a maximum of 5 pages (5 mats A4 size, single space, Times of font size 10, two columns format), including figures, tables and references.

Selected papers will be considered for publication in International Journals.

Invited Sessions: The Technical Programme Committee is soliciting proposals for invited sessions foeusing on topics related to the theme of ICARCV'96. Prospective organisers should submit proposals to the Technical Programme Co-Chairman (at the same address as the one given bwlow) by the 31 May 1996.

(continued on page 124)