

多变量频域设计方法中预期开环传递函数矩阵的选择

张霖 吴麒 高黛陵

(清华大学自动化系·北京, 100084)

摘要: 在控制系统的频率域设计方法中,最为关键的一步是预期开环特征函数(矩阵) $Q(s)$ 的选择,这是一个极为重要但又通常被忽略的问题.本文讨论了 $Q(s)$ 的选择对控制系统的静态性能,鲁棒性及所得控制器的可实现性和简单性等的影响.

关键词: 多变量系统; 预期传递函数矩阵; 鲁棒性; 控制器的简单性

1 控制系统性能对预期开环传递函数矩阵的要求

对多变量控制系统的频率域设计方法而言,设计预期的开环传递函数 $Q(s) = G(s)K(s)$ (其中 $Q(s)$, $G(s)$, $K(s)$ 分别是单位反馈系统的开环传递函数,对象传递函数和控制器传递函数)是至关重要的一步,而又往往被忽略.实际上,唯有选择 $Q(s)$ 这一环节才需要设计者来权衡折衷,作出决断,才是真正的设计任务.因此,与其说设计的是控制器 $K(s)$,毋宁说设计的是预期开环传递函数 $Q(s)$, $K(s)$ 的获取只是靠计算,并不含有设计的性质.

作者在[1]中指出,为保证系统的鲁棒性,应把 $Q(s)$ 设计成正规矩阵,正规矩阵 $Q(s)$ 可表示成如下形式:

$$Q(s) = Z(s) \operatorname{diag} \{ \lambda_i(s) \}_{i=1}^m Z^*(s). \quad (1)$$

其中 $Z(s)$ 为酉矩阵.在这个基础上, $Q(s)$ 的设计问题可分解为两个子问题,即:①标架矩阵 $Z(s)$ 的设计,②预期特征函数 $\lambda_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 的设计.

关于第一个子问题,保持 $Z(s)$ 为酉矩阵就可以确保 $Q(s)$ 的正规性,从而保证系统的鲁棒性.由于 $Z(s)$ 中不含系统的零极点,所以 $Z(s)$ 主要影响所得控制器的简单性,如何在所有的酉矩阵中选择有利的一个,这个问题我们已在[1]中做了讨论,这里不再赘述.

关于第二个子问题,即诸 $\lambda_i(s)$ 的选择问题,这是多种频率域设计方法共同的问题,即选择预期开环特征函数的问题.

要想设计出一个满意的控制系统,必须在 $Q(s)$ 的设计中考虑下面这些要求.

由被控制对象与控制器组成的闭环系统应该满足:①稳定性;②静态指标;③动态性能;④鲁棒性.这些性能必须由开环传递函数矩阵 $Q(s)$ 来保证.

我们注意到 $Q(s) = G(s)K(s)$ 而 $G(s)$ 已经给定.所以一旦选定了 $Q(s)$,也就是确定了控制器 $K(s)$.但从工程实现考虑, $K(s)$ 本身又必须满足一系列条件.具体说,控制器 $K(s)$ 应该满足:⑤ $K(s)$ 为真有理分式矩阵;⑥ $K(s)$ 是稳定的;⑦ $K(s)$ 应尽可能简单,即其阶次应尽可能低.

因此在设计 $Q(s)$ 时不但要保证①~④,而且还必须同时兼顾⑤~⑦.

* 国家教委高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(9300327).

本文于1994年9月24日收到.1995年6月23日收到修改稿.

目前关于 $Q(s)$ 的选择尚无较为系统的方法, 往往是依靠设计者的经验, 而且常常要采用设计-仿真-再设计-再仿真的试凑方法. 下面我们将对 $Q(s)$ 的选择问题进行较为系统的研究.

2 预期开环传递函数矩阵的选择

上述的第①~③项要求, 主要靠诸 $\lambda_i(s)$ 的选择来满足. 每个 $\lambda_i(s)$ 的选择可根据单变量系统已有的知识来完成. 在文[2]及其后续的工作中, 吴麒等通过大量的实验研究, 提出几种 4 阶 (或 5 阶) 最小相位模型, 这几种模型能够较好地满足许多控制系统的性能要求. 这些结果都可直接用于 $\lambda_i(s)$ 的设计.

关于上述的第⑤项要求, 我们有如下的结果.

定义多项式矩阵 $P(s)$ 的第 i 行的阶次为

$$\deg_i P(s) = \max_j (\deg p_{ij}(s)).$$

其中 $\deg p_{ij}(s)$ 表示 $p_{ij}(s)$ 的阶次, $p_{ij}(s)$ 为 $P(s)$ 的 (i, j) 元.

定义有理分式矩阵 $Q(s)$ 的第 i 行的相对阶次为

$$\text{rdeg}_i Q(s) = \min_j (\text{rdge } q_{ij}(s)).$$

其中 $\text{rdge } q_{ij}(s)$ 表示 $q_{ij}(s)$ 的相对阶次, $q_{ij}(s)$ 为 $Q(s)$ 的 (i, j) 元. 下面在不致引起混淆的情况下省略矩阵函数中的自变量, 如 $G(s)$ 略作 G .

结论 令 $G = d_G^{-1} N_G$, $Q = d_Q^{-1} N_Q$, 其中 d_G, d_Q 分别为 G 和 Q 的所有元的最小公分母.

若多项式矩阵 N_G 是行既约的, 则 $K(s)$ 为真的充分必要条件为

$$\text{rdeg}_i Q \geq \text{rdeg}_i G, \quad \forall i.$$

证 由 $K = G^{-1}Q = N_G^{-1}d_G d_Q^{-1}N_Q = (d_Q N_G)^{-1}d_G N_Q$ 知, 若 N_G 为行既约的, 则 K 为真的充分必要条件为

$$\deg_i (d_Q N_G) \geq \deg_i (d_G N_Q), \quad \forall i.$$

上式等价于

$$\deg_i d_Q + \deg_i N_G \geq \deg_i N_Q + \deg_i d_G, \quad \forall i.$$

即

$$\deg_i d_Q - \deg_i N_Q \geq \deg_i d_G - \deg_i N_G, \quad \forall i.$$

亦即

$$\text{rdeg}_i Q \geq \text{rdeg}_i G, \quad \forall i.$$

证毕.

关于上述的第⑥项要求, 如果对象传递函数矩阵 $G(s)$ 是最小相位的, 则只要将 $Q(s)$ 设计为最小相位的就可以了, 这也就是要求诸 $\lambda_i(s)$ 均为最小相位的. 但如果 $G(s)$ 有右半平面的零点, 则要求 $Q(s)$ 中保留这些零点, 否则 $K(s)$ 将出现右半面极点, 即 $K(s)$ 将是不稳定的, 从而违反上述第⑥项要求. 但是在 $Q(s)$ 中保留右半面的零点无疑将损害控制系统的性能. 对于在 $G(s)$ 为非最小相位的情况, 作者将在其它文章中单独讨论.

下面我们来考虑上述第④项要求, 即控制系统的鲁棒性对于 $Q(s)$ 的要求. 设 $\Delta(s)$ 为乘性摄动, 它与系统的实际模型 $G_p(s)$ 及标称模型 $G(s)$ 之间有如下关系:

$$G_p(s) = (I + \Delta(s))G(s), \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < l(\omega). \quad (2)$$

其中 $l(\omega)$ 为大于零的实函数, 我们得到如下结论^[1]: 如果 $Q(s)$ 为正规矩阵, 则对任一给定

的 ω 只要

$$\frac{|1 + \lambda_i(j\omega)|}{\rho(Q(j\omega))} > l(\omega), \quad \forall i. \quad (3)$$

$\rho(\cdot)$ 为矩阵的谱半径(即所有特征值的最大模),就可保证系统在扰动 $\Delta(s)$ 下鲁棒稳定.

因此,当(1)式中的 $Z(s)$ 选为酉矩阵(即 $Q(s)$ 为正规矩阵)时,根据(3)式,诸 $\lambda_i(s)$ 的选择应在满足稳定性及动静态性能的前提下,为达到鲁棒稳定的要求,尽量遵循下列原则:

1) 诸 $\lambda_i(s)$ 的 Nyquist 曲线应尽量远离 $(-1, j0)$ 点.

2) 诸 $\lambda_i(s)$ 的积分环节的个数应该相同,否则,当 $\omega \rightarrow 0$ 时,对于某些 i 将有

$$\frac{|1 + \lambda_i(\omega)|}{\rho(Q(j\omega))} \rightarrow 0.$$

3) 诸 $\lambda_i(s)$ 的模应尽量小.

$Q(s)$ 与控制器 $K(s)$ 的复杂性之间的关系比较复杂.可以验证,当选择两个静动态性能非常接近的开环传递函数时,由它们所确定的控制器的阶次可能相差很多,对于单变量的情形,我们可以采用使 $Q(s)$ 的零极点尽可能多地与 $G(s)$ 的零极点重合这一原则来使控制器的阶次比较低.但对于多变量系统,情况要复杂得多.当 $Q(s)$ 表示为(1)式的形式时,控制器 $K(s)$ 为

$$K(s) = G^{-1}(s)Q(s) = G^{-1}(s)Z(s) \operatorname{diag}\{\lambda_i(s)\}_{i=1}^m Z^*(s). \quad (4)$$

显然,由于⑤中含有矩阵 $Z(s)$,在设计诸 $\lambda_i(s)$ 时,仅考虑 $G(s)$ 的零极点是不行的.我们利用已经总结出的几种典型模型做为预期的 $\lambda_i(s)$,并将其进行参数化(设参数向量是 x ,此时 $K(s)$ 亦为 x 的函数,记为 $K(s, x)$),同时将系统的性能按一定标准分成“优”,“良”,“可”三个性能等级,并给出诸 $\lambda_i(s)$ 的各参数在不同性能等级上的取值范围,然后对各参数进行寻优,以使 $K(s)$ 的阶次尽可能低.具体算法略.

参 考 文 献

- [1] 张霖,吴麒,高黛陵.设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法.自动化学报,1994,20(2):138-145
- [2] 吴麒,高黛陵,孙增圻.估算一类反馈控制系统动态指标的经验公式.清华大学学报,1979,19(2):52-62
- [2] Hung, Y. S. and MacFarlane, A. G. J. . Multivariable Feedback: A Quasi-classical Approach. Spriger-Verlag, 1982

The Choice of the Required Open-Loop Transfer Function Matrix of Multivariable Frequency Domain Design Method

ZHANG Lin, WU Qi and GAO Dailing

(Department of Automation, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

Abstract: For the frequency domain design methods of control systems, the most critical step is to choose the required open-loop transfer function (matrix) $Q(s)$. This problem is very important but often be neglected. This paper discusses the influences of the choice of $Q(s)$ to the static and dynamic performance.

robustness, the realizability and the simplicity of the obtained controllers of control systems.

Key words: multivariable systems; required open-loop transfer function matrix; robustness; the simplicity of controllers

本文作者简介

张霖 1966年生,清华大学自动化系副教授,1986年毕业于南开大学计算机与系统科学系,1989年获工学硕士学位,1992年获工学博士学位,感兴趣的方向有鲁棒控制系统的设计,控制系统的计算机辅助设计,以及控制系统的智能设计等。

吴麒 1930年生,清华大学自动化系教授,博士生导师,IEEE高级会员,1952年毕业于清华大学电机工程系,长期从事控制理论教学和科研工作,近十余年来一直从事多变量频率域控制理论,控制系统的计算机辅助设计,以及控制系统的智能设计等方面的教学和科研工作,指导博士研究生。

高黛陵 女,清华大学自动化系副教授,1961年毕业于清华大学自动控制系,曾多年从事核反应堆控制工程和理论的科研和教学工作,计算机科学的教学和科研工作,近十余年来一直从事多变量频率域控制理论,系统的计算机辅助设计,人工智能及其应用,以及控制系统的智能设计等方面的教学和科研工作,指导硕士研究生,担任博士研究生的副导师。

(continued from page 120)

Best Paper Award: An award will be given to the authos(s) of the best paper. The selection will be made at the conference based on both the techincal contents and the presentation. The winner(s) will be chosen by the Technical Programme Committee members in consultation with the International Advisory Committee members.

Author's Schedule:

31 May 1996 Receipt of extended summary

15 July 1996 Notification of Acceptance

31 August 1996 Receipt of Camera Ready Manuscripts

Please submit three copies of the abstract and the extended summary for revies to:

Dr Chan Sai Piu

c/o Instr and System Engg Lab

School of Electrical and Electronic Engg

Nanyang Technological University

Nanyang Avenue, Singapore 2263

Republic of Singapore

Tel: (65) 799-5471; Fax: (65) 791-2687

E-mail: icarcv96 @ ntux. ntu. ac. sg