第 13 卷第 4 期
1996 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 4
Aug., 1996

时滞线性随机系统的均方稳定性与反馈镇定*

邓飞其　冯昭枢　刘永清

(华南理工大学自动化系・广州,510641)

摘要: 本文研究 Itô 型随机滞后系统的均方稳定性与反馈镇定. 文中首先建立了 Itô 型随机滞后系统的新型稳定性定理,然后采用适当的 Lyapunov 泛函得到了时滞线性随机系统零解均方渐近稳定的一个充分性判据,该判据适用于完全滞后型的随机系统,据此判据,文中给出了时滞线性随机系统的滞后反馈镇定方法.

关键词: 时滞; 线性随机系统; 均方稳定性; 反馈镇定; Lyapunov 泛函

1 引　言

Lyapunov 函数与 Lyapunov 泛函是研究系统稳定性与镇定的有力工具;不过,用这种方法所得结果的优劣依赖于 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函的选取,因此,用这种方法得到的许多结果均具有一定的局限性. 例如,对形如

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-r_1) + \cdots + A_mx(t-r_m) \tag{1}$$

的系统,许多文献通过 $\dot{x} = A_0x$ 的 Lyapunov 函数构造其 Lyapunov 泛函,而将 $A_1x(t-r_1) + \cdots + A_mx(t-r_m)$ 当作干扰项处理. 在这种处理中,要求 $A_1,\cdots,A_m$ 是小参数,所得结果不适用于 $A_0 = 0$ 的情形(完全滞后型系统),因而所得结果在应用上有较大局限性. 对于时滞随机系统,文献中的结果均属这一类型. 那么,是否可以建立新型的稳定性定理、构造适用的 Lyapunov 泛函,用以研究时滞随机系统的稳定性与镇定问题,使所得结果适用于完全滞后型系统呢? 本文首先得到了这方面的结果.

2 引　理

引理 1[1]　若 $x,y \in \mathrm{R}^n, r > 0, P \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 半正定,则

$$2x^{\mathrm{T}}Py = 2(\sqrt{P}x)^{\mathrm{T}}(\sqrt{P}y) \leqslant rx^{\mathrm{T}}Px + \frac{1}{r}y^{\mathrm{T}}Py.$$

引理 2[2]　若 $x(\cdot):[t_0-\tau, +\infty) \to \mathrm{R}^n$ 满足时滞不等式

$$\|x(t)\| \leqslant a|x_t| + h(t \geqslant t_0),\ \|x(t)\| \leqslant \tilde{\varphi}(t)(t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0), \tag{2}$$

其中 $0 \leqslant a < 1, h > 0$,则有常数 $\alpha: 0 < \alpha < \alpha_0 = -\frac{1}{\tau}\ln a$, 使

$$\|x(t)\| \leqslant |\tilde{\varphi}|e^{-\alpha(t-t_0)} + bh \quad (t \geqslant t_0). \tag{3}$$

其中 $b = 1/(1-a), |x_t| = \sup_{\theta\in J}\|x(t+\theta)\|, J = [-\tau, 0], |\tilde{\varphi}|$ 类似.

引理 3[3]　若 $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 一致连续,且 $f \in L^1[0,\infty)$,则 $f(t) \to 0(t \to +\infty)$.

注 1　引理 3 中区间 $[0, +\infty)$ 可换成 $[t_0, +\infty), t_0 \in \mathrm{R}$.

---

* 国家自然科学基金、霍英东高校青年教师基金、广东省自然科学基金资助的项目.

本文于 1994 年 12 月 29 日收到.

3 随机泛函微分方程新型稳定性定理

考虑随机泛函微分方程(SFDE):

$$dx(t) = f(t,x_t)dt + \sigma(t,x_t)dW(t). \tag{4}$$

其中 $x \in R^n, f: R^+ \times C \to R^n, \sigma: R^- \times C \to R^{n\times m}, C = C([-\tau,0],R^n)$, $W(t)$ 是定义在完全概率空间 (Ω,F,P) 上具有独立分量的 m 维标准 Wiener 过程; $f(t,0) = 0, \sigma(t,0) = 0(\forall t \in R^+)$, f,σ 满足[4]中条件 $(H_1) \sim (H_3)$.

关于均方稳定性之定义,参考文[4]等文献.

(4)生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子定义为

$$\mathscr{L} = \partial/\partial t + f^T\nabla + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^T\Delta). \tag{5}$$

其中 ∇ 为梯度算子, $\Delta = \nabla\cdot\nabla$, tr = trace.

由 Itô 公式[4],若 Lyapunov 泛函 $V(t,x_t)$ 满足[4]中条件 (A_1),则 $(EV(t,x_t))' = E\mathscr{L}V(t,x_t)$.

定理 1 若存在算子 $D: R^+ \times C \to R^n$,泛函 $V: R^+ \times C \to R$ 及常数 $k_1,k_2,k_3 > 0$,使 $\forall \varphi \in C$ 及(4)之解过程 x_t,

i) $\|D(t,\varphi)\|^2 \geqslant \beta(\|\varphi(0)\|^2 - a|\varphi|^2), a,\beta = \mathrm{const.}, 0 \leqslant a < 1, \beta > 0$;

ii) $k_1\|D(t,\varphi)\|^2 \leqslant V(t,\varphi) \leqslant k_2|\varphi|^2$;

iii) $\mathscr{L}V(t,x_t) \leqslant -k_3\|x(t)\|^2$.

则(4)之零解 $x = 0$ 均方渐近稳定. 其中 $\|\cdot\|$ 为任意向量范数,下面取为 Euclid 范数.

证 设 $t_0 \in R^+, \varphi \in C, x_t$ 是(4)之过 (t_0,φ) 之解过程. $\forall \varepsilon > 0$,记 $\delta(\varepsilon) = (1 + \frac{k_2}{(1-a)k_1\beta})^{-1}\varepsilon$. 由 iii), $(EV(t,x_t))' = E\mathscr{L}V(t,x_t) \leqslant -k_3E\|x(t)\|^2$,于是 $EV(t,x_t)$ 单调不增,由 i) ii),

$$k_1\beta(E\|x(t)\|^2 - aE|x_t|^2) \leqslant k_1E\|D(t,x_t)\|^2 \leqslant EV(t,x_t)$$
$$\leqslant EV(t_0,x_{t_0}) = EV(t_0,\varphi) \leqslant k_2E|\varphi|^2,$$

$$E\|x(t)\|^2 \leqslant aE|x_t|^2 + k_2k_1^{-1}\beta^{-1}E|\varphi|^2. \tag{6}$$

于是由引理 2 得, $E|\varphi|^2 < \delta(\varepsilon)$ 时,

$$E\|x(t)\|^2 \leqslant E|\varphi|^2e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{1-a}k_2k_1^{-1}E|\varphi|^2 \quad (\alpha > 0)$$

$$\leqslant \gamma E|\varphi|^2 < \varepsilon, \quad \gamma = 1 + \frac{k_2}{(1-a)k_1\beta}, \tag{7}$$

所以(4)之零解均方一致稳定.

由(7), $E|x_t|^2 < \gamma E|\varphi|^2 (t \geqslant t_0)$. 由于 f,σ 满足[4]中条件 (H_3),所以存在有界测度 μ,使 $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in C$,

$$\|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)\| + \|\sigma(t,\varphi_2) - \sigma(t,\varphi_1)\| \leqslant \int_{-\tau}^{0}\|\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)\|d\mu(\theta). \tag{8}$$

记 $M = [\int_{-\tau}^{0}d\mu(\theta)]^2$,由(8)可推得

$$\|f(t,\varphi)\|^2 \leqslant \int_{-\tau}^{0}d\mu(\theta)\int_{-\tau}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2d\mu(\theta) \leqslant M|\varphi|^2,$$

$$\|\sigma(t,\varphi)\|^2 \leqslant M|\varphi|^2.$$

于是

$$\begin{cases}2f^{\mathrm T}(t,x_t)x(t) \leqslant \|f(t,x_t)\|^2 + \|x(t)\|^2 \leqslant (1+M)|x_t|^2 \leqslant \gamma(1+M)|\varphi|^2, \\ \operatorname{tr}(\sigma\sigma^{\mathrm T}) \leqslant n\|\sigma\sigma^{\mathrm T}\| \leqslant n\|\sigma\|^2 \leqslant nM|x_t|^2 \leqslant \gamma nM|\varphi|^2.\end{cases} \tag{9}$$

经计算有 $\mathscr{L}\|x\|^2 = \mathscr{L}x^{\mathrm T}x = 2f^{\mathrm T}x + \operatorname{tr}(\sigma\sigma^{\mathrm T})$，由(9)式，

$$\mathscr{L}\|x(t)\|^2 \leqslant \gamma(1+(n+1)M)|\varphi|^2,$$

$$(\mathrm E\|x(t)\|^2)' = \mathrm E\mathscr{L}\|x(t)\|^2 \leqslant \gamma(1+(n+1)M)\mathrm E|\varphi|^2. \tag{10}$$

由(10)，$\mathrm E\|x(t)\|^2$ 一致连续.

由 iii)，对 $t > t_0$，

$$k_3\int_{t_0}^{t}\mathrm E\|x(s)\|^2\mathrm ds \leqslant -\int_{t_0}^{t}\mathrm E\mathscr{L}V(s,x_s)\mathrm ds \leqslant V(t_0,\varphi) - V(t,x_t) \leqslant V(t_0,\varphi).$$

由此知 $\mathrm E\|x(\cdot)\|^2 \in \mathrm L^1[t_0,\infty)$. 由引理3，$E\|x(t)\|^2 \to 0(t\to+\infty)$，所以 $x=0$ 均方渐近稳定.　证毕.

4　时滞线性随机系统的均方稳定性判据

考虑时滞定常线性随机系统

$$\mathrm dx(t) = [A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m}A_ix(t-r_i)]\mathrm dt + \sum_{j=1}^{N}F_jx(t-\sigma_j)\mathrm dW_j. \tag{11}$$

其中 $x(\cdot)\in\mathrm R^n, A_i, F_j\in\mathrm R^{n\times n}, 0\leqslant r_i,\sigma_j\leqslant\tau, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,N; W(t)=[W_1(t), W_2(t),\cdots,W_N(t)]^{\mathrm T}(t\geqslant 0)$ 是定义在完全概率空间(Ω,F,P)上具有独立分量的 N 维标准 Wiener 过程.

记 $r_0=0$，定义

$$D(t,x_t) = x(t) + \sum_{i=1}^{m}A_i\int_{t-r_i}^{t}x(s)\mathrm ds, \tag{12}$$

$$A = \sum_{i=0}^{m}A_i, \tag{13}$$

则由 Itô 微分公式[4]可得

$$\mathrm dD(t,x_t) = Ax(t)\mathrm dt + \sum_{j=1}^{N}F_jx(t-\sigma_j)\mathrm dW_j. \tag{14}$$

(14)是一个中立型随机泛函微分方程，它是由 Itô 微分公式建模得到的. 文献中尚未见到中立型机泛函微分方程.

定理 2　若系统(11)满足：

i) 存在对称正定矩阵 $P\in\mathrm R^{n\times n}$ 使

$$A^{\mathrm T}P + PA + \sum_{i=1}^{m}r_i(A^{\mathrm T}PA + A_i^{\mathrm T}PA_i) + \sum_{j=1}^{N}F_j^{\mathrm T}PF_j \triangleq -Q < 0 \quad (负定); \tag{15}$$

ii) 滞量 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m}r_i\|A_i\| < 1, \tag{16}$$

则(11)之零解均方渐近稳定.

证 定义 Lyapunov 泛函 $V(t,x_t)=V_1+V_2+V_3$ 其中

$$\begin{cases} V_1 = D^{\mathrm{T}}PD, \\ V_2 = \sum_{i=1}^{m}\int_{t-r_i}^{t}\int_{s}^{t}[A_ix(u)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s, \\ V_3 = \sum_{j=1}^{N}\int_{t-\sigma_j}^{t}[F_jx(s)]^{\mathrm{T}}P[F_jx(s)]\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{17}$$

用 $\mathscr{L}$ 表示(11)生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子，则有 $\Delta V_1 = 2P$，

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V &= \mathscr{L}V_1 + \mathscr{L}V_2 + \mathscr{L}V_3 \\ &= \mathscr{L}V_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3. \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^{m} r_ix^{\mathrm{T}}(t)A_i^{\mathrm{T}}PA_ix(t) - \sum_{i=1}^{m}\int_{t-r_i}^{t}[A_ix(s)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(s)]\mathrm{d}s, \tag{19}$$

$$\dot{V}_3 = \sum_{j=1}^{N} x^{\mathrm{T}}(t)F_j^{\mathrm{T}}PF_jx(t) - \sum_{j=1}^{N} x^{\mathrm{T}}(t-\sigma_j)F_j^{\mathrm{T}}PF_jx(t-\sigma_j), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V_1 &= \dot{V}_1|_{(1)} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\Delta V_1) \\ &= 2[Ax(t)]^{\mathrm{T}}PD + \sum_{j=1}^{N}x^{\mathrm{T}}(t-\sigma_j)F_j^{\mathrm{T}}PF_jx(t-\sigma_j), \\ &= x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P+PA)x(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-r_i}^{t}2[Ax(t)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(s)]\mathrm{d}s \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N}x^{\mathrm{T}}(t-\sigma_j)F_j^{\mathrm{T}}PF_jx(t-\sigma_j). \end{aligned} \tag{21}$$

由引理 1，

$$2[Ax(t)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(s)] \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}PAx(t) + [A_ix(s)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(s)]. \tag{22}$$

将(22)用于(21)右端第 2 式，得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V_1 \leqslant{} & x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P+PA+\sum_{i=1}^{m}r_iA^{\mathrm{T}}PA)x(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-r_i}^{t}[A_ix(s)]^{\mathrm{T}}P[A_ix(s)]\mathrm{d}s \\ & + \sum_{j=1}^{N}x^{\mathrm{T}}(t-\sigma_j)F_j^{\mathrm{T}}PF_jx(t-\sigma_j). \end{aligned} \tag{23}$$

由(18)，(19)，(20)，(23)得

$$\mathscr{L}V \leqslant -x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) \leqslant -\lambda_m(Q)\|x(t)\|^2. \tag{24}$$

所以 V 满足定理 1 之条件 iii)．

从 V 之定义式知，有常数 $k_1,k_2>0$ 使

$$k_1\|D(t,x_t)\|^2 \leqslant V(t,x_t) \leqslant k_2|x_t|^2, \tag{25}$$

所以 V 满足定理 1 之条件 ii)．

记 $a=\sum_{i=1}^{m}r_i\|A_i\|$，$\rho=\frac{1}{2}(1-a^2)$．按定理条件，$\rho>0$，由引理 1，

$$2a|x_t|\|D\| = 2|x_t|(a\|D\|) \leqslant \rho|x_t|^2 + \frac{a^2}{\rho}\|D\|^2. \tag{26}$$

于是得

$$\| x(t) \|^2 = \| D - \sum_{i=1}^{m} \int_{t-r_i}^{t} A_i x(s) \mathrm{d}s \|^2$$
$$\leqslant (\| D \| + a|x_t|)^2 = \| D \|^2 + a^2|x_t|^2 + 2a|x_t| \| D \|$$
$$\leqslant (a^2 + \rho)|x_t|^2 + (1 + \frac{a^2}{\rho}) \| D \|^2, \tag{27}$$

$$\| D \|^2 \geqslant \beta(\| x(t) \|^2 - \bar{a}|(x_t|^2). \tag{28}$$

其中 $\bar{a} = \frac{1}{2}(1 + a^2) < 1, \beta = \rho/(\rho + a^2) > 0$. 所以 D 满足定理 1 之条件 i). 由定理 1,(11) 之零解均方渐近稳定.　　证毕.

注 2　在定理 2 的条件中, $A_0, A_1, \cdots, A_m$, 处于对称位置,这使得定理 2 适用于 $A_0 = 0$ 的情形.

推论 1　若(11)满足:

i) $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$,即 A 稳定;

ii) 滞量 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \| A_i \| < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i(\| A \|^2 + \| A_i \|^2) \| P \| < \lambda_m(Q), \tag{29}$$

其中 P 是矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \sum_{j=1}^{N} F_j^{\mathrm{T}} P F_j = -Q \tag{30}$$

之正定解. Q 是给定正定矩阵, $\lambda_m(Q) = \min[\lambda(Q)]$,则(11) 之零解均方渐近稳定.

注 3　本文采用的矩阵范数是谱范数或 Frobenius 范数.

5　时滞线性随机系统的反馈镇定

考虑控制系统

$$\mathrm{d}x(t) = [A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - r_i) + Bu]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{N} F_j x(t - \sigma_j)\mathrm{d}W_j. \tag{31}$$

其中 $x, A_i, F_j, r_i, \sigma_j$ 如上所述, $u \in \mathrm{R}^r, B \in \mathrm{R}^{n\times r}$.

引入滞后控制律

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m} K_i x(t - r_i), \quad (r_0 = 0). \tag{32}$$

其中 $K_i \in \mathrm{R}^{r\times n}, i = 1, 2, \cdots, m$. 引入记号

$$K = \sum_{i=0}^{m} K_i, \quad A = \sum_{i=0}^{m} A_i, \quad \hat{A} = A_i + BK_i, \quad \hat{A} = \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i = A + BK. \tag{33}$$

则(31)(32)形成的闭环系统为

$$\mathrm{d}x(t) = \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i x(t - r_i)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{N} F_j x(t - \sigma_j)\mathrm{d}W_j. \tag{34}$$

若(34)之零解均方渐近稳定,则称(32)使(31)镇定.

由推论 1 有如下

定理 3　若

i) (A,B) 可控;

ii) 滞量 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \|\hat{A}_i\| < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i(\|\hat{A}\|^2 + \|\hat{A}_i\|^2)\|P\| < \lambda_m(Q); \tag{35}$$

iii) $K_0,K_1,\cdots,K_m$,之选择满足

$$K_0 + K_1 + \cdots + K_m = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P, \tag{36}$$

则(32)使(31)镇定. 其中 P 是矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \sum_{j=1}^{N} F_j{}^{\mathrm{T}}PF_j = -Q \tag{37}$$

之正定解,而 $R \in \mathrm{R}^{r\times r}, Q \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 是给定的正定矩阵.

注 4 由(33)(36)(37)知, P 满足

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}P + P\hat{A} + \sum_{j=1}^{N} F_j{}^{\mathrm{T}}PF_j = -(Q + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P). \tag{38}$$

6 设计举例

例 1 考虑随机控制系统

$$\mathrm{d}x(t) = [Ax(t) + Bu(t)]\mathrm{d}t + Fx(t)\mathrm{d}W. \tag{39}$$

其中 $x = [x_1,x_2]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^2, \quad u \in \mathrm{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.47446 & -0.45916 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0.30000 \\ 0.30000 & -0.30000 \end{bmatrix}.$$

易知(A,B)可控,采用定理 3 的方法设计(39)的滞后控制律 $u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t-r)$.

取 $R = \dfrac{1}{2}, Q = I_2$,则(37)有正定解

$$P = \begin{bmatrix} 1.44050 & 0.52554 \\ 0.52554 & 0.54084 \end{bmatrix}.$$

经计算,有 $\|P\| = 1.68244, \|\hat{A}\| = 1.61803, \|\hat{A}_1\| = 1.06638$. 由(35)得滞量 r 的估计: $0 \leqslant r < 0.15828$. 取 $r = 0.158$,得(39)的一个稳定滞后控制律

$$u(t) = -[1.05108, 1.08168]x(t - 0.158). \tag{40}$$

7 结束语

由于许多实际控制系统的状态受到周围环境中随机噪声的激励,所以随机系统的稳定性与控制有着重要的实际意义. 又由于信号处理与传递需要时间,所以在任何实际系统的反馈回路中均存在时滞,因此,有必要研究控制与状态具有滞后的随机系统的稳定性与镇定方法. 本文通过数学上的准备,获得了这方面的结果,使随机控制系统理论更接近实际工作环境.

参 考 文 献

[1] 邓飞其,赵玉鹏,冯昭枢. 一类随机滞后大系统的分散镇定. 1994 中国控制会议论文集. 北京:中国科学技术出版社. 1994,86-89

[2] 徐道义. 中立型泛函微分系统的稳定性. 数学学报,1992,35(5):632-641

[3] Barbalat, I.. System d'equations Differentialles d'oscillations Nonlinear. Rov. Roumaine Math. Pures Appl. ,1959,4: 267－270

[4] 刘永清,冯昭枢.大型动力系统的理论与应用,卷4:随机·稳定与控制.广州:华南理工大学出版社,1992,66,67,68

Mean-Square Stability and Feedback Stabilization of Linear delay Stochastic Systems

DENG Feiqi, FENG Zhaoshu and LIU Yongqing

(Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510640. PRC)

Abstract: In this paper ,mean-square stability and feedback stabilization of delay stochastic systems of Itô type are investigated. A new type stability theorem for delay stochastic systems of Itô type is established ,then a sufficient criterion for mean-square asymptotic stability of zero solutions of linear delay stochastic systems is obtained by applying suitable Lyapunov functionals ,which is applicable for completely retarded stochastic systems. A method of stabilization by retarded feedbacks for linear delay stochastic systems is proposed based on this criterion

Key words: delay; linear stochastic system; mean-square stability; feedback stabilization; Lyapunov functional

本文作者简介

邓飞其　见本刊1996年第1期第35页.

冯昭枢　见本刊1996年第1期第35页.

刘永清　见本刊1996年第1期第35页.