第 13 卷第 4 期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 4
1996 年 8 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Aug., 1996

正规 Petri 网及其逆向最优调度

杨　盛　吴　澄
(清华大学自动化系 CIMS-ERC · 北京, 100084)

摘要: 常规 Petri 网的变迁发生规则是正向的, 即根据输入库所的标识确定授权变迁集, 再从中选择发生变迁集并修改输出库所的标识. 这一方面造成了冲突, 另一方面使得对于一个预期的目标标识, 不能按照系统成本最低或利润最大的原则来确定变迁的发生. 为此本文提出了正规 Petri 网的概念并研究了它的两种级联方式——并联正规网和串联正规网, 以及逆正规网这一重要概念. 对于上述的最优问题, 我们提出了逆向的授权规则, 即根据目标输出标识确定发生变迁集, 再由发生变迁集确定输入标识. 并且进一步把这类最优调度问题转化为整数规划问题. 最后我们研究了上述最优调度的对偶问题并将它转化为逆正规网的原问题来加以求解.

关键词: Petri 网; 正规网; 最优调度; 对偶问题

1　引　　言

近年来, Petri 网在生产制造系统的建模、分析与控制等方面得到了广泛的应用[1~8]. 这类生产制造系统在理论上可以归入离散事件动态系统, 具有异步、并发和子系统间的协调等特征. 用 Petri 网设计的制造系统控制器至少具有以下四个优点:

1) 相对直观的图形表示便于系统的建模[5,9~11]. 系统分解、自上而下地逐步求精以及模块化组合对于复杂系统的建模是行之有效的[2,12].

2) 有各种有效的数学分析方法来检测系统的性能并防止阻塞、溢出和死锁等恶劣行为[7,13].

3) 日益增多的软件提供了系统性能分析的辅助工具[8,14,15].

4) 能够从 Petri 网的描述中直接产生监控代码[5,10,16].

目前对生产制造系统的 Petri 网模型的性能分析集中在系统的有界性(安全性)、活性、可逆性和加工周期等方面. 系统的有界性能够避免溢出的发生, 而活性则意味着系统的无死锁. 可逆性表示系统加工行为的周期性和重复性.

生产制造过程的一个重要方面, 是按照系统成本最低或利润最大的原则来组织生产. 这一点在 Petri 网模型中不能很好地实现. 这一方面是因为常规的 Petri 网缺乏明确的输入和输出单元, 因而不能很好地在数学上描述各种优化问题; 另一方面也因为 Petri 网的变迁发生规则是正向的, 即根据输入库所的标识确定授权变迁集, 再从中选择发生变迁集并修改输出库所的标识.

为了使 Petri 网适合于描述生产制造系统中的各种优化问题, 我们需要将 Petri 网规范化, 明确它的输入和输出, 并给出它的逆向授权规则, 即根据目标输出标识确定发生变迁集, 再由发生变迁集确定输入标识.

本文于 1994 年 9 月 28 日收到. 1995 年 8 月 28 日收到修改稿.

为此，我们在下文中提出了正规 Petri 网的概念，并给出了两类优化问题的正规 Petri 网表述.

2 正规 Petri 网的概念与性质

本节研究正规 Petri 网的概念与性质. 正规 Petri 网简称正规网，它作为一类特殊的 Petri 网，对外界具有明确的输入和输出接口，便于研究它的输入和输出(传递)特性，因而适于描述开环的离散事件动态系统. 对于闭环系统和复杂系统，则可以通过正规网的合成来描述.

在下文中我们用 $|A|$ 表示有限集合 A 的元素个数，用 N 表示非负整数集合，用 N^n 表示 n 维非负整数向量的集合，用 $N^{n\times m}$ 表示$n\times m$ 的元素为非负整数的矩阵的集合.

定义 1 原子正规网定义为如下五元组 $Z=(P_I,P_O,T,A,B)$. 其中

1) $P_I\cap P_O=\Phi$，$(P_I\cup P_O)\cap T=\Phi$. P_I,P_O,T 是三个有限非空集合，分别称为输入库所集、输出库所集和变迁集.

2) 输入函数 $A:P_I\times T\rightarrow N$，并且 $\forall\, t\in T$，$\exists\, p\in P_I$，使得 $A(p,t)\neq 0$. 这个函数也可以用一个 $|P_I|\times|T|$ 的矩阵 A 表示，称为输入矩阵.

3) 输入函数 $B:P_O\times T\rightarrow N$，并且 $\forall\, t\in T$，$\exists\, p\in P_O$，使得 $B(p,t)\neq 0$. 这个函数也可以用一个 $|P_O|\times|T|$ 的矩阵 B 表示，称为输出矩阵.

4) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=|T|$，即$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$满列秩.

5) $\exists\, I:P_I\rightarrow N$. I 也可以用一个 $|P_I|$ 维列向量表示，$I\in N^{|P_I|}$，称为输入标识.

6) $\exists\, I:P_O\rightarrow N$. O 也可以用一个 $|P_O|$ 维列向量表示，$O\in N^{|P_O|}$，称为输出标识.

条件 4)要求每个变迁都是独立的，不能被其它变迁线性表示. 这是为了保证根据实际系统建立的原子正规网的唯一性.

记 $M=[I^{\mathrm{T}},O^{\mathrm{T}}]$，称为原子正规网 Z 的标识. 原子正规网的变迁发生规则如下：对 $\forall\, t\in T$，如果 $I(p)\geqslant A(p,t)$，$\forall\, p\in P_I$，则称 t 被 M 授权或者 t 在 M 有发生权. 一个被授权的变迁 t 可以发生，发生的结果是生成新的标识 $M'=[I'^{\mathrm{T}},O'^{\mathrm{T}}]$，其中 $I'(p)=I(p)-A(p,t)$，$\forall\, p\in P_I$，$O'(p)=O(p)+B(p,t)$，$\forall\, p\in P_O$.

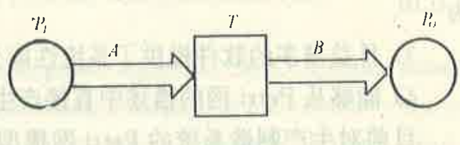

图 1 原子正规网的示意图

进一步，对于一个 $|T|$ 维向量 $x\in N^{|T|}$，如果 $I\geqslant Ax$，则称变迁向量 x 被 M 授权. x 发生的结果是生成新的标识 $M'=[I'^{T},O'^{T}]$，其中 $I'=I-Ax$，$O'=O+Bx$. 这个过程记为 $M(Z,x>M'$. 正规网 Z 的标识 M 的可达集定义为 $R(Z,M)=\{M'\,|\,\exists\, x\in N^{|T|}$，使得 $M(Z,x>M')\}$.

下面我们来定义另外一个概念——逆正规网. 这个概念对于求解第三节中的对偶问题具有重要意义.

定义 2 原子正规网 $Z_2=(P_{I2},P_{O2},T_2,A_2,B_2)$ 称为原子正规网 $Z_1=(P_{I1},P_{O1},T_1,A_1,B_1)$ 的一个广义逆正规网当且仅当 $|P_{I1}|=|P_{O2}|$，$|P_{O1}|=|P_{I2}|$，而且任意两个标识$[I_1^{\mathrm{T}},O_1^{\mathrm{T}}]$ 和$[I_2^{\mathrm{T}},O_2^{\mathrm{T}}]$，如果$[I_2^{\mathrm{T}},O_2^{\mathrm{T}}]\in R(Z_1,[I_1^{\mathrm{T}},O_1^{\mathrm{T}}])$，则必有$[O_1^{\mathrm{T}},I_1^{\mathrm{T}}]\in R(Z_2,[O_2^{\mathrm{T}},I_2^{\mathrm{T}}])$.

原子正规网 Z 的广义逆正规网不是唯一的，记它的全体为 Z^R. 以图 2 的原子正规网 Z_1

为例，容易证明图 3 的 Z_2 和图 4 的 Z_3 都是 Z_1 的广义逆正规网. 实际上，对任意两个标识 $[I_1^T, O_1^T]$ 和 $[I_2^T, O_2^T]$，如果 $\exists\ x \in N^2$，使得 $[I_1^T, O_1^T](Z_1, x > [I_2^T, O_2^T]$，那么只要令 $y = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,1 \end{bmatrix} x$ 和 $z = x$，就必有 $[O_2^T, I_2^T](Z_2, y > [O_1^T, I_1^T]$ 和 $[O_2^T, I_2^T](Z_3, z > [O_1^T, I_1^T]$. 因此 Z_2 和 Z_3 都是 Z_1 的广义逆正规网.

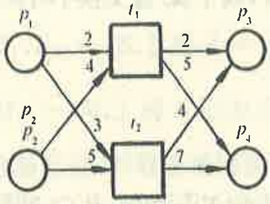

图 2　Z_1

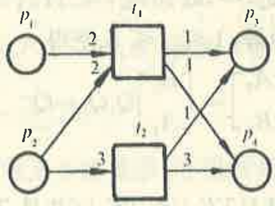

图 3　$Z^2 \in Z_1^R$

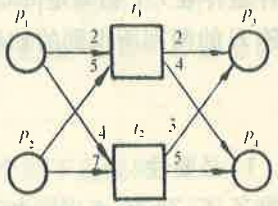

图 4　$Z_3 \in Z_1^R$

定理 1　两个原子正规网 $Z_i = (P_{Ii}, P_{Oi}, T_i, A_i, B_i)$，$i = 1, 2$. 如果 $Z_2 \in Z_1^R$，则 $|T_2| \geqslant |T_1|$.

证　由定义，$\forall\ x_1 \in N^{|T_1|}$，如果 $[I_1^T, O_1^T](Z_1, x_1 > [I_2^T, O_2^T]$，则 $\exists\ x_2 \in N^{|T_2|}$ 使得 $[O_2^T, I_2^T](Z_1, x_1 > [O_1^T, I_1^T]$. 写成矩阵形式，即为

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ O_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ O_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} x_1, \quad \begin{bmatrix} O_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} x_2,$$

因此

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ O_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_1 \\ O_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} x_2.$$

由于 A_1 与 B_2 有相同的行数，所以 $-A_1x_1 = -B_2x_2$，即 $A_1x_1 = B_2x_2$，所以

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} x_2.$$

由于 $x_1 \in N^{|T_1|}$ 的任意性，$\exists$ 矩阵 $P \in N^{|T_2| \times |T_2|}$，使得

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} P.$$

又由于 $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix}$ 是满列秩的，因此

$$|T_1| = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} = |T_2|.$$

证毕.

对于图 3 图 4 来说，尽管 $Z_2 \in Z_1{}^R$，$Z_3 \in Z_1{}^R$，但是反过来 $Z_1 \in Z_3{}^R$，$Z_1 \notin Z_2{}^R$. 比如令 $I_1 = [2,2]^T$，$O_1 = I_2 = [0,0]^T$，$O_2 = [1,1]^T$，则 $[I_1^T, O_1^T](Z_2, [1,0]^T > [I_2^T, O_2^T]$，但此时不存在变迁向量 $x_1 \in N^2$，使得 $[O_2^T, I_2^T,](Z_1, X_1 > [O_1^T, I_1^T]$，因此 $Z_1 \notin Z_2^R$，另一方面，$\forall\ [I_1^T, O_1^T](Z_3, X_3 > [I_2^T, O_2^T]$，都有 $[O_2^T, I_2^T](Z_1, X_3 > [O_1^T, I_1^T]$，因此 $Z_1 \in Z_3^R$. 为了区分 Z_2 和 Z_3 的种不同性质，我们有如下定义：

定义 3　原子正规网 Z_2 称为原子正规网 Z_1 的一个严格逆正规网当且仅当 $Z_2 \in Z_1^R$ 并且 $Z_1 \in Z_2^R$.

下面我们来证明，严格逆正规网具有广义上的唯一性．首先有如下的引理：

引理1 如果可逆矩阵 $P \in N^{n\times n}$，并且 $P^{-1} \in N^{n\times n}$，则 P 可以分解为 $P = EQ_1Q_2\cdots Q_i$，其中 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，$Q_j$ 为交换 $n \times n$ 单位矩阵 E 的两列所得到的初等矩阵，$1 \leqslant j \leqslant i$.

引理1的证明见附录.

定理2 两个原子正规网 $Z_i = (P_{Ii}, P_{Oi}, T_i, A_i, B_i)$，$i = 1, 2$. Z_2 是 Z_1 的严格逆正规网的充要条件是存在 i 个初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i$，$0 \leqslant i \leqslant |T_1| - 1$，其中 Q_j 为交换 $|T_1| \times |T_1|$ 单位矩阵 E 的两列所得到的初等矩阵，$1 \leqslant j \leqslant i$. 使得

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_i.$$

证　1° 必要性.

因为 $Z_2 \in Z_1^R$，$Z_1 \in Z_2^R$，由定理1，$|T_1| = |T_2|$，并且 $\exists\ P \in N^{|T_1|\times|T_1|}$，$R \in N^{|T_1|\times|T_1|}$，使得

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} P, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} R. \tag{2}$$

由于 $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix}$ 是满列秩的并且列数相同，所以 $P^{-1} = R$. 由引理1，$\exists$ $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i$，使得 $R = EQ_1Q_2\cdots Q_i$，代入(2)式得

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_i,$$

必要性得证.

2° 充分性.

对 $\forall\ [I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}](Z_1, x_1 > [I_2^{\mathrm{T}}, O_2^{\mathrm{T}}]$，即

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ O_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ O_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} x_1,$$

写成

$$\begin{bmatrix} O_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} x_1,$$

由于 $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_i$，所以 $\begin{bmatrix} O_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} Q_i^{-1}Q_{i-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}x_1$，因此，只要令 $x_2 = Q_i^{-1}Q_{i-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}x_1$，则 $[O_2^{\mathrm{T}}, I_2^{\mathrm{T}}](Z_2, x_2 > [O_1^{\mathrm{T}}, I_1^{\mathrm{T}}]$. 这说明 $Z_2 \in Z_1^R$，同理 $Z_1 \in Z_2^R$. 因此，Z_2 是 Z_1 的严格逆正规网，充分性得证.　　证毕.

定理2说明，如果不管 $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 中各列的排列次序，则 $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix}$ 完全相同，这表明一个物理系统的实际逆系统是唯一的. 记 Z_1 的所有严格逆正规网组成的集合为 Z_1^r. 因为 $\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} Q_1, Q_2\cdots Q_i$ 最多只能取 $|T_1|!$ 个不同的矩阵，所以 Z_1^r 最多只有 $|T_1|!$ 个不同元素. Z_2 如

果满足$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix}$,则称为 Z_1 的标准正规网,记为 Z_1^{-1}. 因此 $Z_1^{-1} \in Z_1^r \subset Z_1^R$.

下面我们来研究原子正规网的两种基本级联方式——并联正规网和串联正规网. 由这两种级联方式可以构造复杂的网系统.

定义 4　n 个原子正规网 $Z_i = (P_{Ii}, P_{Oi}, T_i, A_i, B_i)$,$Z_i$ 的标识为 M_i,$i = 1,2,\cdots,n$. $Z_i \cap Z_j = \Phi, i \neq j$. 定义 $P_I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_{Ii}$, $P_O = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_{Oi}$, $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, $A = \mathrm{diag}[A_1, A_2, \cdots, A_n]$, $B = \mathrm{diag}[B_1, B_2, \cdots, B_n]$,则 $Z = (P_I, P_O, T, A, B)$ 称为 n 阶并联正规网,其中 Z 的标识为 $M = [M_1, M_1, \cdots, M_n]$. 将 Z 记为 $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$.

容易验证,并联正规网满足定义 1 的要求,它仍然是一个原子正规网.

定义 5　n 个原子正规网 $Z_i = (P_{Ii}, P_{Oi}, T_i, A_i, B_i)$,$Z_i$ 的标识为 $M_i = [I_i^{\mathrm{T}}, O_i^{\mathrm{T}}]$,$i = 1, 2, \cdots, n$. 如果 $T_i \cap T_j = \Phi, i \neq j$,而且 $P_{Oi} = P_{Ii+1}$, $O_i = I_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$,则这 n 个原子正规网构成一个 n 阶串联正规网,记为 $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$. 定义 Z 的输入库所集 $P_I = P_{I1}$,输入标识 $I = I_1$;输出库所集 $P_O = P_{On}$,输出标识 $O = O_n$;变迁集 $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$;$Z$ 的标识 $M = [I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}, O_2^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n^{\mathrm{T}}]$.

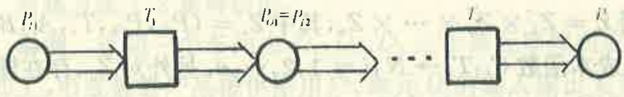

图 5　n 阶串联正规网

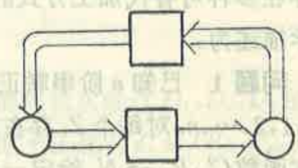

图 6　封闭系统

当 $n \neq 1$ 时,n 阶串联正规网不再是原子正规网,所以它的变迁发生规则要重新定义. $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$ 的变迁向量 $x = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 在 $M = [I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}, O_2^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n^{\mathrm{T}}]$ 有发生权并且 $[I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}, O_2^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n^{\mathrm{T}}](Z, x > [I_1'^{\mathrm{T}}, O_1'^{\mathrm{T}}, O_2'^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n'^{\mathrm{T}}]$ 是指存在 $O_1''^{\mathrm{T}}, O_2''^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n''^{\mathrm{T}}$,满足 $[I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}](Z_1, x_1 > [I_1'^{\mathrm{T}}, O_1''^{\mathrm{T}}]$, $[O_{i-1}''^{\mathrm{T}}, O_i^{\mathrm{T}}](Z_i, x_i > [O_{i-1}'^{\mathrm{T}}, O_i''^{\mathrm{T}}]$, $i = 2, 3, \cdots, n-1$, $[O_{n-1}''^{\mathrm{T}}, O_n^{\mathrm{T}}](Z_n, x_n > [O_{n-1}'^{\mathrm{T}}, O_n'^{\mathrm{T}}]$.

定义 $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$ 的标准逆正规网 $Z^{-1} = Z_n^{-1} \times Z_{n-1}^{-1} \times \cdots \times Z_1^{-1}$. 容易证明,如果 $\exists\, x = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 使得 $[I_1^{\mathrm{T}}, O_1^{\mathrm{T}}, O_2^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n^{\mathrm{T}}](Z, x > [I_1'^{\mathrm{T}}, O_1'^{\mathrm{T}}, O_2'^{\mathrm{T}}, \cdots, O_n'^{\mathrm{T}}]$,那么令 $y = [x_n^{\mathrm{T}}, x_{n-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,必有 $[O_n'^{\mathrm{T}}, O_{n-1}'^{\mathrm{T}}, \cdots, O_1'^{\mathrm{T}}, I_1'^{\mathrm{T}}](Z^{-1}, y > [O_n^{\mathrm{T}}, O_{n-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, O_1^{\mathrm{T}}, I_1^{\mathrm{T}}]$.

定义 6　正规网 Z_i 的输入库所集为 P_{Ii},输出库所集为 P_{Oi},$i = 1, 2$. 如果 $P_{I1} = P_{O2}$, $P_{I2} = P_{O1}$,则称 $CS = (Z_1, Z_2)$ 为封闭系统,CS 的标识 $M = [M_1, M_2]$.

在 Petri 网中经常涉及的性质包括有界性、活性和可逆性. 一个 Petri 网 Z 称为 K- 有界的,如果 $\forall\, M \in R(Z, M_0)$,有 $M \leq [K, K, \cdots, K]$. Z 称为活的,如果 $\forall\, t \in T$ 和 $\forall\, M \in R(Z, M_0)$, $\exists\, M' \in R(Z, M)$ 使 t 有发生权. Z 称为可逆的,如果 $\forall\, M \in R(Z, M_0)$,有 $M_0 \in R(Z, M)$. 可以证明,对原子正规网 Z,只要输入标识 $I \geq A[1, 1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}$,则 $CS = (Z, Z^{-1})$ 一定是有界的、活的和可逆的. 但对 $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$, $CS = (Z, Z^{-1})$ 不一定是活的和可逆的,以图 7 为例,$CS = (Z, Z^{-1})$. 令 $M_1 = [1,1,0,0,0,0,0,0,0]$, $M_2 = [0,0,2,2,0,0,0,0,0]$,则 $M_2 \in R(Z, M_1)$,但是 $M_1 \notin R(Z, M_2)$. 可以证明,对 $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$,其中 $Z_i = (P_{Ii},$

$P_{Oi},T_i,A_i,B_i)$, $i=1,2,\cdots,n$, $CS=(Z,Z^{-1})$ 当输入标识 $I \geq A_1[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$, Z^{-1} 的初始标识为 0 时必定有界、活性和可逆的充分必要条件是 $\exists\ P_i \in N^{|T_{i+1}|\times|T_{i+1}|}$，使得 $B_i = A_{i+1}P_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

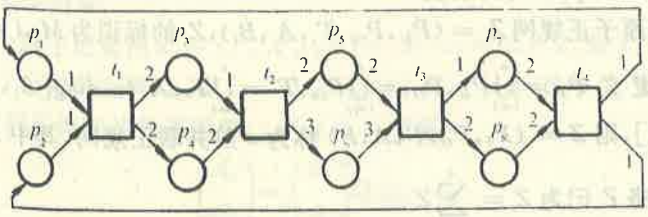

图 7 $CS=(Z,Z^{-1})$ 不可逆

3 正规 Petri 网的最优调度

对于一个多级串联的生产流水线，在数学上可以用一个 n 阶串联正规 Petri 网来描述 Petri 网的库所对应生产过程中的资源和在制品，变迁对应加工操作. 因此发生变迁集表示当前可进行的操作. 这种流水线的一种调度问题是：在生产线上存在多个品种，而每个品种又存在多种可替代加工方式的情况下，确定每个品种的加工路径，使生产的总成本最小，其数学描述为：

问题 1 已知 n 阶串联正规网 $Z=Z_1\times Z_2\times\cdots\times Z_n$，其中 $Z_i=(P_{Ii},P_{Oi},T_i,A_i,B_i)$, $i=1,2,\cdots,n$. 对每个 Z_i 存在加工成本函数 $C_i:T_i\to N$, $i=1,2,\cdots,n$. 另外对 Z_1，存在输入成本函数 $C':P_{I1}\to N$. 给定一个目标输出标识 O，要求确定初始输入标识 I 和变迁向量 x，使得 $[I,0](Z,x>[0,O]$，并且使系统运行的总成本最小.

问题 1 确定了正规网 Z 逆向的变迁发生规则：根据目标输出标识确定发生变迁集，再由发生变迁集确定初始输入标识. 它可以用如下的整数规划来描述.

确定 $x=[x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},\cdots,x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $x_i\in N^{|T_i|}$，使得

$$\min = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + C'I = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + C'A_1x_1$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} B_i x_i \geq A_{i+1}x_{i+1}, & i=1,2,\cdots,n-1, \\ B_n x_n \geq O. \end{cases} \tag{1}$$

在上述约束中取≥是因为我们不能保证等号的成立.

问题 1 共有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|T_i|$ 个非负整数变量，$\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{Oi}|$ 个约束. 我们可以通过整数规划的分枝定界法或者割平面法求得问题 1 的最优解.

问题 1 是使成本最小. 在生产实际中还常常遇到上述问题的对偶问题，即给定输入标识，要确定输出标识并使利润最大.

问题 2 已知 n 阶串联正规网 $Z=Z_1\times Z_2\times\cdots\times Z_n$，其中 $Z_i=(P_{Ii},P_{Oi},T_i,A_i,B_i)$, $i=1,2,\cdots,n$. 对每个 Z_i 存在加工成本函数 $C_i:T_i\to N$, $i=1,2,\cdots,n$. 另外对 Z_n 还存在输出利润函数 $R:P_{On}\to N$. 给定一个初始输入标识 I，试确定变迁向量 x 和输出标识 O，使得 $[I,0](Z,x>[0,O]$，并且使系统净赢利最大.

对于问题 2,我们有两种求解思路:一种是直接对原问题求解,另一种是考虑 Z 的逆正规网 Z^{-1}并将问题 2 转化为问题 1 来求解.

方法 1　确定 $x=[x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},\cdots,x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,其中 $x_i\in N^{|T_i|}$,使得

$$\max=RO-\sum_{i=1}^{n}C_ix_i=RB_nx_n-\sum_{i=1}^{n}C_ix_i,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}I\geq A_1x_1,\\ B_ix_i\geq A_{i+1}x_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{2}$$

方法 2　考虑 Z 的逆正规网 $Z^{-1}=Z_n^{-1}\times Z_{n-1}^{-1}\times\cdots\times Z_1^{-1}$,其中 $Z_i^{-1}=(P_{Ii},P_{Oi},T_i,B_i,A_i)$,$i=1,2,\cdots,n$. 令 Z_n^{-1} 的输入成本函数 $C':P_{On}\to N=-R:P_{On}\to N$. 问题转化为给定一个输出标识 I,要求确定初始输入标识 O 和变迁向量 y,使得$[O,0](Z^{-1},y>[0,I]$,并使系统运行的总成本最小.

确定 $y=[y_n^{\mathrm{T}},y_{n-1}^{\mathrm{T}},\cdots,y_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,其中 $y_i\in N^{|T_i|}$,使得

$$\min=C'B_ny_n+\sum_{i=1}^{n}C_iy_i=-RB_ny_n+\sum_{i=1}^{n}C_iy_i,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}I\geq A_1y_1,\\ B_iy_i\geq A_{i+1}y_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{3}$$

显然方法 1,2 是等价的.

举例　已知一个车间由 D_1,D_2,D_3 三个单元串接而成,零部件依次经过 D_1,D_2,D_3 的装配加工,形成最终产品提供给用户. 单元 D_i 的输入输出关系用原子正规网 $Z_i=(P_{Ii},P_{Oi},T_i,A_i,B_i)$ 表示,$i=1,2,3$. 其中 $P_{I1}=\{p_1,p_2\}P_{O1}=\{p_3,p_4\}$,$T_1=\{t_1,t_2\}$,$P_{I2}=\{p_3,p_4\}$,$P_{O2}=\{p_5,p_6\}$,$T_2=\{t_3,t_4\}$,$P_{I3}=\{p_5,p_6\}$,$P_{O3}=\{p_7,p_8\}$,$T_3=\{t_5,t_6\}$. $A_1=\begin{bmatrix}3,1\\1,4\end{bmatrix}$,$B_1=\begin{bmatrix}2,1\\1,3\end{bmatrix}$,$A_2=\begin{bmatrix}5,2\\0,4\end{bmatrix}$,$B_2=\begin{bmatrix}2,1\\0,3\end{bmatrix}$,$A_3=\begin{bmatrix}1,1\\1,1\end{bmatrix}$,$B_3=\begin{bmatrix}1,0\\1,1\end{bmatrix}$. 对于每个变迁发生一次,都有一定的加工成本,用向量函数表示为 $C[t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6]=[20,30,60,50,20,20]$. 另外对 Z_1,还存在输入成本 $C'(p_1)=5$,$C'(p_2)=6$. 现在给定一个目标输出标识 $O=[40,50]^{\mathrm{T}}$,要求确定最优的路径调度方案,使得系统运行的总成本最小.

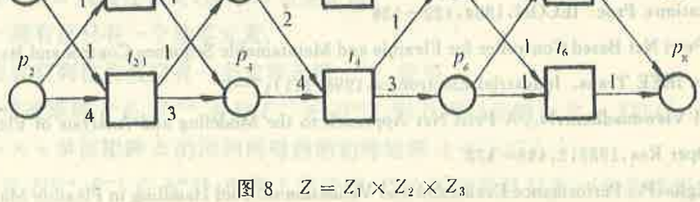

图 8　$Z=Z_1\times Z_2\times Z_3$

解　令 $Z=Z_1\times Z_2\times Z_3$,如图 8 所示. 上述问题即要求确定初始输入标识 I 和变迁向量 $x=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^{\mathrm{T}}$,使得$[I,0](Z,x>[0,O])$,并且系统行动的总成本最小. 由问题 1 的讨论,其数学模型如下:

$$\min = Cx + C'A_1x_1$$

$$= 20x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 20x_5 + 20x_6 + [5,6]\begin{bmatrix}3,1\\1,4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$= 41x_1 + 59x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 20x_5 + 20x_6,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{bmatrix}2,1\\1,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}5,2\\0,4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2,1\\0,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}1,1\\1,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1,0\\1,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}40\\50\end{bmatrix}.$$

x_1,x_2,x_3,x_4 为非负整数.

解这个整数规划，得到最优解 $x = [59,3,17,17,40,10]^T$，进而可知需要$[p_1,p_2]$为$[180,71]$，中间生成半成品$[p_3,p_4,p_5,p_5] = [121,68,51,51]$，用掉$[119,68,50,50]$剩余$[2,0,1,1]$，最后得到最终产品$[p_7,p_8] = [40,50]$，系统运行成本为 5466.

4 结 论

本文研究了 Petri 网的最优调度问题. 为了使 Petri 网适合于表述最优调度，本文给出了 Petri 网的规范形式——正规 Petri 网，并提出了逆正规网、并联正规网、串联正规网等重要概念. 为了使 Petri 网的某个调度指标最优，我们提出了逆向的授权规则，即根据目标输出标识确定发生变迁集，再由发生变迁集确定输入标识. 最后讨论了两类相关的最优调度问题并将它们转化为整数规划问题来求解.

作为讨论 Petri 网最优调度的开始，本文仅研究了开环串联正规网的最优调度，没有涉及存在资源竞争、死锁等情况以及复杂系统、闭环系统的最优调度. 进一步的研究将包括考虑各种复杂因素在内的 Petri 网的最优调度或者次最优调度.

参 考 文 献

[1] 陆维明，林闯. 生产系统的 Petri 网模型. 自动化学报，1993，19(3)：290—299

[2] Zhou, M. C., McDermolt, K. and Patel, P. A.. Petri Net Synthesis Analysis of a Flexible Manufacturing System Cell. IEEE Trans. Syst. Man. Cybern, 1993, 23(2): 523—531

[3] Zhou, M. C., DiCesare, F. and Desrochers, A. A.. A Hybrid Methodology for Synthesis of Petri Net Methods for Manufacturing Systems. IEEE Trans. Ronotics Automat, 1992, 8(3): 350—361

[4] Zhou, M. C. and DiCesare, F.. Adaptive Design of Petri Net Controllers for Error Recovery in Automated Manufacuring Systems. IEEE Trans. Man. Cybern, 1989, 19(5): 963—972

[5] Murata, T., Komoda, N. and Matsumoto, K.. A Petri-net Based Factory Automation for Flexible and Maintainable Control Specifications. Proc. IECON, 1984, 122—136

[6] Murata, T., A Petri Net Based Controller for Flexible and Maintainable Sequence Control and Its Applications in Factory Automation. IEEE Trans. Industrial Electronics, 1996, 1(1): 1—8

[7] Narahari, Y. and Viswanadham, N.. A Petri Net Approach to the Modeling and Analysis of Flexible Manufacturing Systems. Ann Oper Res, 1985, 3: 449—472

[8] Bruno, G. and Biglia, P.. Performance Evaluation and Validation of Tool Handling in Flexible Manufacturing Systems Using Petri Nets. IEEE 1985 Int Workshop Timed Nets, 1985, 1: 64—71

[9] Kasturia, E. Dicesare, F.. and Desrochers, A. A.. Real -Time Control of Multilevel of Manufacturing Systems Using Colored Petri Nets. Proc 1988 IEEE Int. Conf. Robotics and Automat., 1988, 2: 1114—1119

[10] Crockett, D., Desrochers, A. A., DiCesare, F. and Ward, T.. Implementation of a Petri Net Controller for a Machin-

ing workstation. Proc. 1987 IEEE Int. Conf. Robotics and Automat. ,1987,3:1861—1867

[11] Peterson,J. L.. Petri Net Theory and Modelling of Systems. Prentice-Hall ,Englewood Cliffs,NJ,1981

[12] Suzuki,I. and Murata,T.. A Method for Stepwise Refinements and Abstractions of Petri Nets. J Comput Syst. Sci.,1983,27:51—76

[13] Al-Jaar,R. Y. and Desrochers,A. A.. Petri Nets in Automation and Manufacturing. Adances in Automation and Robotics,1989,2:327—342

[14] Balbo,G. ,Frauceschinis,G. and Roet,G. M.. Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Evaluation of FMS. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automat. ,Raleigh,NC,1987,1013—1018

[15] Al-Jaar,R. Y. and Desrochers,A. A.. Modeling and Analysis of Transfer Lines and Production Networks Using Generalized Stochastic Petri Nets. Proc Conf Univ Programs in Computer-Aided Eng Design and Manufacturing,Atlanta,GA,1988,12—21

[16] Atabakhche,H. ,Barbalho,D. S. ,Valette,R. and Courviosier,M.. From Petri Net Based PLC's to Knowledge Based Control. Proc. IECON,1986,812—817

附　录

关于引理 1 的证明.

首先我们有如下定理:

定理　如果 n 阶实矩阵和 A^{-1} 的各个元素均大于或等于零,则 A 的每列有且只有一个非零元素.

证　设 $A=[a_{ij}],A^{-1}=[b_{ij}],a_{ij}\geq 0,b_{ij}\geq 0$. 首先我们来证明 A 的第一列有且只有一个非零元素. 因为 $A[1,0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}}$,又 A 可逆,所以

$$[1,0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}=A^{-1}[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}}=[\sum_{i=1}^{n}b_{1i}a_{i1},\sum_{i=1}^{n}b_{2i}a_{i1},\cdots,\sum_{i=1}^{n}b_{ni}a_{i1}]^{\mathrm{T}}.$$

假设 $[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}}$ 中存在两个非零元素 a_{j1} 和 a_{k1},则

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}b_{1i}a_{i1}\\ b_{2j}a_{j1}+b_{2k}a_{k1}+\sum_{1\neq j,k}b_{2i}a_{i1}\\ \vdots\\ b_{nj}a_{j1}+b_{nk}a_{k1}+\sum_{1\neq j,k}b_{ni}a_{i1}\end{bmatrix}.$$

因为 $a_{ij}\geq 0,b_{ij}\geq 0$,而且 $a_{j1}\neq 0,a_{k1}\neq 0$,比较等式两边,知

$$b_{ij}=b_{ik}=0,\quad i=2,3,\cdots,n.$$

所以 A^{-1} 的第 j 列与第 k 列线性相关,这与 A 可逆矛盾.

所以 A 的第一列有且只有一个非零元素.

同理可证 A 的其它列也有且只有一个非零元素.　　证毕.

引理 1　如果可逆矩阵 $P\in N^{n\times n}$,并且 $P^{-1}\in N^{n\times n}$,则 P 可以分解为 $P=EQ_1Q_2\cdots Q_i$,其中 $0\leq i\leq n-1$,Q_j 为交换 $n\times n$ 单位矩阵 E 的两列所得到的初等矩阵,$1\leq j\leq i$.

证　因为 $P\in N^{n\times n},P^{-1}\in N^{n\times n}$,根据上述定理,$P$ 的每列有且只有一个非零元素,又因为 $|P|\cdot|P^{-1}|=1$,所以 P 的每列有且只有一个非零元素 1. 所以 P 可以分解为

$$P=EQ_1Q_2\cdots Q_i,\quad 0\leq i\leq n-1.$$

证毕.

Normal Petri Net and Its Backward Optimal Scheduling

YANG Sheng　and　WU Cheng

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: The transition firing rule of conventional Petri nets is forward, which means the enabled transitions are determined by the pre-set markings of places, then the firing transitions are chosen from which are enabled. This on the one hand results in conflict and contact, on the other hand makes it impossible to determine the transition firings according to the criteria of mininmal cost or maximal profit. To solve this problem the paper presents the new concept of normal Petri net, then investigates two kinds of its connections—parallel normal net and series normal net. Further more the notation of reverse normal net is introduced. Considering the optimal problem mentioned above, the backward enabling rule is presented, which determines the firing transitions according to the target markings, then the initial markings are determined by the firing transitions. In such a way the optimal problem is translated to the integer program problem. At last the dual problem of the above problem is studied and is converted to the original problem of reverse normal net.

Key words: Petri net; normal Petri net; optimal scheduling; dual problem

本文作者简介

杨　盛　1970年生. 1992年毕业于清华大学自动化系自动控制专业，获工学学士学位. 同年入清华大学自动化系CIMS中心攻读博士学位至今. 研究兴趣为制造系统的建模、调度与性能分析，以及工业计算机应用技术.

吴　澄　1940年生. 1957年入清华大学电机系工企自动化专业读本科和研究生，1966年毕业. 1981年至1983年作为访问学者在美国进修. 1986年起参加国家863计划CIMS主题的研究工作. 1988年起任清华大学自动化系教授. 研究兴趣为系统建模、系统设计方法论、系统实现的使能技术以及系统可靠性理论等.