第 13 卷第 4 期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 4
1996 年 8 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Aug., 1996

一类组合非线性系统的局部干扰解耦*

姜　斌
(天津大学电力及自动化工程系·天津,300072)

刘晓平　张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

摘要：本文考虑一类组合非线性系统的局部干扰解耦问题,给出了其可解的充要条件,并用两个例子说明方法的可用性.

关键词：组合非线性系统；相似性；局部干扰解耦

1 引　言

最近几年,一些研究结果表明,大系统的自身结构对其分析与设计产生很大影响.例如文献[1～3]已经证明:对称的内联结构可以使这类组合线性系统的品质分析与控制器的设计大大简化.然而,实际中绝大多数系统均是非线性的.本文给出一类由相似的非线性子系统通过相似的关联组成的大系统的数学描述.这类组合非线性系统有较强的背景,具体实例参见文献[4,5].在动态控制系统的研究中,干扰解耦问题无疑是主要的课题之一.文献[6,7]分别研究了线性和非线性系统的干扰解耦问题.但对于由 $N(>2)$ 个非线性子系统组成的非线性大系统,该问题迄今似乎尚无较好的结果.本文研究了上述具有相似结构非线性大系统的局部干扰解耦问题,并用两个实际例子来说明所得结果的可用性.

2 预备知识和系统描述

考虑一类由 N 个非线性子系统组成的大系统

$$\Sigma:\quad \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i) + H_i(x_1,\cdots,x_N) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{ij}(x_i)u_{ij} \\ \quad = f_i(x_i) + H_i(x_1,\cdots,x_N) + g_i(x_i)u_i, & (1a) \\ y_{is} = h_{is}(x_i), \quad i = 1,\cdots,N; \quad s = 1,\cdots,r. & (1b) \end{cases}$$

其中,$x_i \in \mathrm{R}^n$,$u_i \in \mathrm{R}^m$,$y_i \in \mathrm{R}^r$ 分别表示第 i 个子系统的状态、输入和输出,H_i 为交互作用项,且满足:

i)　$\rho_{is} = \rho_{js}, i = 1,\cdots,N; j = 1,\cdots,N; s = 1,\cdots,r.$　(2)

ii)　$\mathrm{rank}A_i(x_i) = \mathrm{rank}A_j(x_i).$　(3)

iii)　$L_{H_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0, \quad t = 0,\cdots,\rho_{is} - 1.$　(4)

其中,ρ_{is},A_i 分别表示第 i 个孤立子系统的输出特征指数和特征矩阵(其定义参见文献[8]).

注 1　式(2)和(3)说明若干个孤立的非线性子系统的相似特征.式(4)说明非线性子系统之间的交互作用的相似性.

定义 1　对于由式(1)～(4)描述且带有干扰项的组合非线性系统

---

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1994 年 3 月 28 日收到,1995 年 12 月 8 收到修改稿.

$$\dot{x} = f_i(x_i) + H_i(x_1,\cdots x_N) + g_i(x_i)u_i + p_i(x_i)\omega_i, \tag{5a}$$

$$y_i = h_i(x_i), \quad i = 1,\cdots,N. \tag{5b}$$

其中，ω_i 代表干扰输入. 其局部干扰解耦问题指的是在点 x_0 的领域上寻找坐标变换 $Z_i = T_i(x_i)$ 及反馈律(若存在)：$u_i = \alpha_i(x_i) + \beta_i(x_i)v_i, i = 1,\cdots,N_j$ 使得在相应的闭环系统中，干扰 ω_i 不影响输出 $y_j, i,j = 1,\cdots,N$.

定义 2 对于由于式(1)～(4)描述且带有可测干扰项的组合非线性系统，其局部可测干扰解耦问题指的是在点 x_0 的邻域上寻找坐标变换 $Z_i = T_i(x_i)$ 及反馈和前馈控制律(如果存在)：

$$u_i = \alpha_i(x) + \beta_i(x_i)v_i + \gamma_i(x_i)\omega_i, \quad i = 1,\cdots,N;$$

使得在相应的闭环系统中，干扰 ω_i 不影响输出 y_j，对于一切 $i,j = 1,\cdots,N$.

3 主要结果

定理 对于由式(1)～(4)描述的组合非线性系统，如果 $\mathrm{rank}A_i(x_{i0}) = r$，那么系统在点 $x_0 = \mathrm{col}[x_{10} \quad x_{20} \quad \cdots \quad x_{N0}]$ 邻域内的干扰解耦问题可解的充要条件是

$$L_{p_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \rho_s, \quad x_i \in U(x_{i0}).$$

其中 $\rho_s = \rho_{is} = \rho_{js}, U(x_i)$ 为 x_{i0} 的领域，$i = 1,\cdots,N, j = 1,\cdots,N_j, s = 1,\cdots,r$.

证 1) 充分性.

对于式(5)，坐标变换选择为

$$Z_t^{is} = L_{f_i}^t h_{is}(x_i), \quad i = 1,\cdots,N; \quad s = 1,\cdots,r; \quad t = 0,\cdots,\rho_s, \tag{6}$$

$$Z_t^{i(r+1)} = x_{i(\rho-1+t)}, \quad t = 0,\cdots,\rho_{r+1}; \quad \rho = \sum_{s=1}^{r}\rho_s + r. \tag{7}$$

非线性反馈设计为

$$v_{is} = L_{f_i}^{\rho_s+1}h_{is}(x_i) + L_{H_i}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}(x_i) + \sum_{j=1}^{m}L_{g_{ij}}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}(x_i)u_{ij}. \tag{8}$$

由假设，解耦矩阵 A_i 均满秩，故非线性反馈(8)是非奇异的.

由式(1b)，可得

$$y_{is} = h_{is}(x_i) = L_{f_i}^0 h_{is}(x_i) = Z_0^{is}. \tag{9}$$

沿着式(5)对式(6)两边求导，得

$$\dot{Z}_t^{is} = L_{f_i}^{t+1}h_{is}(x_i) + L_{H_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) + \sum_{j=1}^{m}L_{g_{ij}}L_{f_i}^t h_{is}(x_i)u_{ij} + L_{p_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i)\omega_i. \tag{10}$$

i) 当 $t \leqslant \rho_s - 1$ 时：

由输出特征指数的定义，式(4)和假设条件，可得

$$\dot{Z}_t^{is} = L_{f_i}^{t+1}h_{is}(x_i) = Z_{t+1}^{is}. \tag{11}$$

ii) 当 $t = \rho_s$ 时：

由假设条件，可得

$$\dot{Z}_{\rho_s}^{is} = L_{f_i}^{\rho_s+1}h_{is}(x_i) + L_{H_i}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}(x_i) + \sum_{j=1}^{m}L_{g_{ij}}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}(x_i)u_{ij} = v_{is}.$$

因此，在坐标变换(6)、(7)和非奇异反馈(8)下，式(5)变为

$$y_{is}=Z_0^{is},\quad \dot{Z}_0^{is}=Z_1^{is},\quad \dot{Z}_1^{is}=Z_2^{is},\quad \cdots,\quad \dot{Z}_{\rho_s-1}^{is}=Z_{\rho_s}^{is},\quad \dot{Z}_{\rho_s}^{is}=v_{is},\tag{13}$$

$$\dot{Z}_t^{i(r+1)}=f_t^{i(r+1)}(Z)+g_t^{i(r+1)}(Z)v_i+p_t^{i(r+1)}(Z)\omega_i.\tag{14}$$

其中，$i=1,\cdots,N$；$s=1,\cdots,r$；$t=0,\cdots,$；$\rho_{r+1}=n-r-1-\sum_{s=1}^{r}\rho_s$.

由式(13)、(14)，输出 y_i 完全从干扰 ω_i 中解耦出来，即组合非线性系统(1)～(4)的局部干扰解耦问题可解.

2）必要性.

不妨假设 $u_i=\alpha_i(x)$ 为使输出解耦于干扰的状态反馈.考虑相应的闭环系统.

$$\dot{x}_i=f_i(x_i)+H_i(x)+g_i(x_i)\alpha_i(x)+p_i(x_i)\omega_i,\tag{15a}$$

$$y_{is}=h_{is}(x_i),\quad i=1,\cdots,N;\quad s=1,\cdots,r.\tag{15b}$$

沿式(15a)对式(15b)两边求导，可得

$$\begin{aligned}y_{is}^{(1)}&=L_{f_i+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)+L_{H_i}h_{is}(x_i)+L_{p_i}h_{is}(x_i)\omega_i\\&=L_{f_i+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)+L_{p_i}h_{is}(x_i)\omega_i.\end{aligned}\tag{16}$$

由假设，输出不受干扰影响，故

$$L_{p_i}h_{is}(x_i)=0,\quad x_i\in U(x_{i0}),\quad i=1,\cdots,N;\quad s=1,\cdots,r.\tag{17}$$

因此，式(16)变为

$$y_{is}^{(1)}=L_{f_i+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i).\tag{18}$$

对式(18)两边再求导，可得

$$\begin{aligned}y_{is}^{(2)}=&L_{f_i^2+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)+L_{H_i}h_{is}(x_i)+L_{H_i}L_{f_i+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)\\&+L_{p_i}L_{f_i+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)\omega_i.\end{aligned}\tag{19}$$

根据文献[8]，可得

$$L_{f_i^k+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)=L_{f_i}{}^kh_{is}(x_i),\quad 0\leqslant k\leqslant\rho_s.\tag{20}$$

故式(19)变为

$$y_{is}^{(2)}=L_{f_i^2+g_i\alpha_i}h_{is}(x_i)+L_{p_i}L_{f_i}h_{is}(x_i)\omega_i.\tag{21}$$

同理可得

$$L_{p_i}L_{f_i}h_{is}(x_i)=0,\quad x_i\in U(x_{i0}).\tag{22}$$

重复以上步聚，一直可得

$$L_{p_i}L_{f_i}^{\rho_s}+h_{is}(x_i)=0,\quad x_i\in U(x_{i0}).\tag{23}$$

其中，$i=1,\cdots,N$；　$s=1,\cdots,r$.

由式(17)、(22)和(23)，定理的必要性得到证明.

推论　对于由式(1)～(4)描述的组合非线性系统，如果 $\operatorname{rank}A_i(x_{i0})=r$，那么，其局部可测干扰解耦问题可解的充要条件是

$$L_{p_i}L_{f_i}{}^th_{is}(x_i)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant\rho_{is}-1,\quad x_i\in U(x_{i0}).$$

其中，$i=1,\cdots,N$；　$s=1,\cdots,r$.

证　由于干扰是可测量的，故可使用反馈和前馈控制，即

$$u_i=\alpha_i(x)+\beta_i(x_i)v_i+\gamma_i(x_i)\omega_i,\quad i=1,\cdots,N.$$

相应的闭环系统为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + h_i(x) + g_i(x_i)\alpha_i(x) + g_i(x_i)\beta_i(x_i)v_i + (g_i\gamma_i + p_i)\omega_i,$$
$$y_{is} = h_{is}(x_i), \quad i = 1,\cdots,N; \quad s = 1,\cdots,r.$$

由定理可知,可测干扰解耦问题可解的充要条件是

$$L_{p_i+g_i\gamma_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \rho_s, \quad x_i \in U(x_{i0}). \tag{24}$$

其中,$i = 1,\cdots,N$; $s = 1,\cdots,r$.

即

$$L_{p_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) + L_{g_i\gamma_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \rho_s. \tag{25}$$

注意到

$$L_{g_i}r_iL_{f_i}^t h_{is}(x_i) = L_{g_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i)\gamma_i.$$

当 $0 \leqslant t \leqslant \rho_s - 1$ 时,

$$L_{g_i}r_iL_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0. \tag{26}$$

由此可得

$$L_{p_i}L_{f_i}^t h_{is}(x_i) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \rho_s - 1. \tag{27}$$

当 $t = \rho_s$ 时,只需取 $\gamma_i(x_i) = \dfrac{-L_{p_i}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}(x_i)}{L_{g_i}L_{f_i}^{\rho_s}h_{is}}$,则式(25)成立,故式(24)等价于式(27),即推论成立.

注 2 由于干扰信号是可测量的,故可以使用前馈控制律,即利用干扰信号的信息来作为一种补偿,从而使得系统实现干扰解耦的条件减弱.

4 例 子

例 1 考虑由 N 个电机组成的电力系统[9]

$$M_i\ddot{\delta}_i + D_i\dot{\delta}_i + P_{li} + P_{ei} = P_{mi}, \quad i = 1,\cdots,N. \tag{28}$$

其中,δ_i 为为第 i 个电机相对于系统同步角的角度,M_i 为惯量系数,D_i 为阻尼系数,P_{li} 为负载功率(视为干扰输入,可以测量),P_{Mi} 为输入功率,P_{ei} 表示第 i 个电机与第 j 个电机之间的关联,为 δ_i,δ_j 的函数,记为 $P_{ei} = k_i(\delta_i,\delta_j)$.

令:

$$x_{i1} = \delta_i, x_{i2} = \dot{\delta}_i, x_i = [x_i, x_{i2}]^{\mathrm{T}},$$
$$x = [x_1 \quad x_2\cdots x_N]^{\mathrm{T}}; \quad u_i = P_{mi}, \quad \omega_i = P_{li},$$

则式(28)变为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + H_i(x) + g_iu_i + p_i\omega_i. \tag{29}$$

其中

$$f_i(x_i) = \begin{bmatrix} x_{i2} \\ -M_i^{-1}D_ix_{i2} \end{bmatrix}, \quad H_i(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_i(x) \end{bmatrix},$$

$$g_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad p_i(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_i^{-1} \end{bmatrix}.$$

选择 δ_i 为输出(通过对 δ_i 的控制间接调节电压),即

$$y_i = h_i = \delta_i. \tag{30}$$

经计算，可得 $\rho_i = 1, A_i = -M_i^{-1}, L_{p_i}h_i = 0$. 由推论，多机电力系统的可测干扰解耦问题可解.

例 2　考虑大型空间望远镜系统[10]

由欧拉方程可得该系统的动力学方程为

$$\begin{cases} I_x\ddot{\varphi} + (I_z - I_y)\dot{\theta}\dot{\psi} = M_x + k_1u_1, \\ I_y\ddot{\theta} + (I_x - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi} = M_y + k_2u_2, \\ I_z\ddot{\psi} + (I_y - I_x)\dot{\theta}\dot{\varphi} = M_z + k_3u_3. \end{cases} \tag{31}$$

其中 $I_x, I_y, I_z, \varphi, \theta, \psi, M_x, M_y, M_z, u_i (i = 1,2,3)$ 的物理意义参见文献[10].

令：
$$x_{11} = \varphi,\ x_{12} = \dot{\varphi},\ x_{21} = \theta,\ x_{22} = \dot{\theta},$$
$$x_{31} = \psi,\ x_{32} = \dot{\psi},\ x_i = [x_{i1}\ x_{i2}]^{\mathrm{T}},\ i = 1,2,3, x = [x_1\ x_2\ x_3];$$
$$M_x = \omega_1,\ M_y = \omega_2,\ M_z = \omega_3;$$
$$\alpha_1 = (I_z - I_y)/I_x,\quad \alpha_2 = (I_z - I_z)/I_y,\quad \alpha_3 = (I_y - I_x)/I_z;$$
$$\beta_1 = k_1/I_x,\quad \beta_2 = k_2/I_y,\quad \beta_3 = k_3/I_z;$$
$$\gamma_1 = 1/I_x,\quad \gamma_2 = 1/I_y,\quad \gamma_3 = 1/I_z.$$

则式(31)改写为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + H_i(x) + g_i(x_i)u_i + p_i\omega_i. \tag{32}$$

其中

$$f_i(x_i) = \begin{bmatrix} x_{i2} \\ 0 \end{bmatrix},\quad g_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i \end{bmatrix},\quad p_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_i \end{bmatrix},$$

$$H_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1x_{22}x_{32} \end{bmatrix},\quad H_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2x_{12}x_{32} \end{bmatrix},\quad H_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_3x_{12}x_{22} \end{bmatrix}.$$

选择 φ, θ, ψ 为输出，则可验证大型空间望远镜系统的可测干扰解耦问题可解.

参 考 文 献

[1] Lunze, J.. Dynamics of Strongly Coupled Symmetric Composite Systems. Int. J. Conrtol., 1986, 44: 1657－1670

[2] Lunze, J.. Stability Analysis of Large-Scale Systems Composed of Strongly Connected Similar Subsystems. Automatica, 1989, 25: 561－570

[3] Liu, X. P.. Output Regulation of Strongly Coupled Symmetric Composite Systems. Automatica, 1992, 28: 1037－1041

[4] Tarn, T. J., Bejczy, A. K. and Yun, X.. New Nonlinear Control Algorithms for Multiple Robot Arms. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1988, 24: 571－582

[5] 刘永清，宋中昆. 大型动力系统的理论与应用(卷 1)——分解，稳定和结构. 广州：华南理工大学出版社，1988

[6] 韩正之. 分散干扰解耦的相容性. 控制理论与应用，1989，6：54－56

[7] 郑玉蕃，胡晓明. 关于非线性系统带稳定性的局部干扰解耦(英文). 控制理论与应用，1993，10：374－383

[8] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京：科学出版社，1988

[9] Jiang, H., Dorsey, J, F., Qu, Z, and Habetter. J.. Global Robust Adaptive Control of a Power System. Proc. of 12th IFAC Congress. Australia, 1993, 525－528

[10] 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京：科学出版社，1988

Local Disturbance Decoupling of a Class of Composite Nonlinear Systems

JIANG Bin
(Department of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University · Tianjin, 300072, PRC)
LIU Xiaoping and ZHANG Siying
(Department of automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: This paper discusses the problem of local disturbance decoupling for a class of composite nonlinear systems, sufficient and necessary conditions under which this problem can be solved are presented, two examples are given to illustrate the application of this method.

Key words: composite nonlinear systems; similarity; local disturbance decoupling

本文作者简介

姜 斌 1966年生. 1988年毕业于江西师范大学数学系, 1991年于东北工学院应用数学系获硕士学位, 1995年于东北大学自控系获博士学位, 现为天津大学电力及自动化工程系讲师. 从事大系统理论与应用、非线性系统的鲁棒控制及机器人控制等方面的研究.

刘晓平 见本刊1996年第1期第69页.

张嗣瀛 见本刊1996年第1期第69页.