

Kalman 滤波的局部渐近稳定性和渐近最优性*

邓自立

张焕水

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080) (东北大学自动化研究中心·沈阳, 110006)

摘要: 本文用现代时间序列分析方法和非递推状态估计理论, 对完全可观、非完全可控系统, 提出了稳态 Kalman 预报器局部渐近稳定性和最优性概念, 揭示了两者的关系; 证明了这类系统的 Kalman 预报器总是局部渐近最优和渐近稳定的; 提出了构造最大局部渐近最优域的新方法, 并给出了几何解释, 推广和发展了经典 Kalman 滤波稳定性理论. 一个算例及其仿真结果说明了所提出的结果的有效性.

关键词: 完全可观、非完全可控系统; 稳态 Kalman 预报器; 局部渐近最优性; 局部渐近稳定性; 局部渐近最优域; 局部渐近稳定域

1 引言

ARMA 信号反卷积可归结为串联系统的状态估计^[1]. 但当信号通道的零点与观测通道的极点发生零极相消时, 则该串联系统是完全可观、非完全可控的^[2]. 因而遇到完全可观、非完全可控系统状态估计问题.

经典 Kalman 滤波理论在完全可观、完全可控条件下证明了 Kalman 滤波的全局渐近稳定性^[3], 即滤波估值渐近地不依赖于滤波初值的选择. 然而对完全可观、非完全可控系统, 稳态 Kalman 滤波是否存在? 是否渐近最优? 是否渐近稳定? 本文将针对稳态 Kalman 预报器进行了研究, 稳态 Kalman 滤波器可类似处理.

新近文[4]部分解决了上述问题, 但文[4]将渐近最优性寓于渐近稳定性中讨论, 事实上两者是不等价的, 因此本文分别提出了稳态 Kalman 预报器的全局和局部渐近最优性和渐近稳定性概念, 并揭示它们之间的关系. 证明了关于全局渐近最优性和稳定性的三个等价命题; 证明了由局部渐近最优性可引出局部渐近稳定性, 但其逆不真; 证明了完全可观、非完全可控系统的稳态 Kalman 预报器总是局部渐近最优的, 并提出构造最大局部渐近最优域的新方法, 且对其几何形状给出了直观解释. 从研究对象、内容和方法上发展了经典 Kalman 滤波稳定性理论.

2 ARMA 新息模型

ARMA 新息模型是现代时间序列分析方法的出发点^[5], 与文[4~6]不同, 这里用有理分式矩阵左素分解方法^[7]可简单地导出 ARMA 新息模型.

考虑线性随机离散时间定常系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2.2)$$

* 黑龙江省自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 3 月 4 日收到. 1995 年 12 月 26 日收到修改稿.

其中状态 $x(t) \in R^n$, 观测 $y(t) \in R^m$, $w(t) \in R^r$ 和 $v(t) \in R^m$ 是零均值、方差阵各为 Q_w 和 Q_v 的独立的白噪声, Φ, H, Γ 是适当维数矩阵. 假设系统是完全可观的, 且可以是非完全可控的. 设可观测性指数 β 是满足下式的最小整数^[4]:

$$\text{rank} \Omega = n, \quad \Omega = [H^T, (H\Phi)^T, \dots, (H\Phi^{\beta-1})^T]^T. \quad (2.3)$$

其中 T 为转置号. 系统 (2.1), (2.2) 有传递函数模型

$$y(t) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}w(t) + v(t). \quad (2.4)$$

其中 q^{-1} 是单位滞后算子, $q^{-1}x(t) = x(t-1)$, I_n 是 $n \times n$ 单位阵. 注意到 (2.4) 中的传递函数阵为有理分式阵, 且

$$H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1} = [\det(I_n - q^{-1}\Phi)]^{-1} H \text{adj}(I_n - q^{-1}\Phi) \Gamma q^{-1}. \quad (2.5)$$

消去 (2.5) 中的左极大公因式引出左既约分解^[7]

$$H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1} = A^{-1}(q^{-1})B(q^{-1}). \quad (2.6)$$

其中多项式矩阵 $(A(q^{-1}), B(q^{-1}))$ 左素, 且

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= I_m + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_a} q^{-n_a}, \quad A_{n_a} \neq 0, \\ B(q^{-1}) &= B_{i_0} q^{-i_0} + \dots + B_{n_b} q^{-n_b}, \quad B_{i_0} \neq 0, \quad B_{n_b} \neq 0, \quad i_0 \geq 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

将式 (2.6) 代入 (2.4) 有

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t). \quad (2.8)$$

定义 (2.8) 右边的两个滑动平均 (MA) 过程之和为

$$r(t) = B(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t). \quad (2.9)$$

容易得到其谱密度矩阵为^[8]

$$S_r(q) = B(q^{-1})Q_w B^T(q) + A(q^{-1})Q_v A^T(q). \quad (2.10)$$

假设 $S_r(e^{i\omega}) > 0$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 则由谱分解定理^[9], $r(t)$ 可用一个等价的单个 MA 过程表示为

$$r(t) = D(q^{-1})\epsilon(t). \quad (2.11)$$

其中 $D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \dots + D_{n_d} q^{-n_d}$ 是稳定的 (即 $\det D(q)$ 的零点在单位圆外), $n_d = \max(n_a, n_b - i_0)$, $\epsilon(t)$ 是零均值、方差阵为 Q_ϵ 的白噪声. 于是由 (2.8)、(2.9)、(2.11) 有 ARMA 模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon(t). \quad (2.12)$$

在常初值 (非随机初值) $(y(-i), \epsilon(-j)), i = 1, 2, \dots, n_a; j = 1, 2, \dots, n_d$ 假设下, 由递推式 (2.12) 易知 $(y(0), \dots, y(t))$ 与 $(\epsilon(0), \dots, \epsilon(t))$ 张成相同的线性流形. 利用白噪声 $\epsilon(t)$ 的正交性和射影性质^[5,10], 取 (2.12) 两边各项到由 $(\epsilon(0), \dots, \epsilon(t-1))$ 所张成的线性流形上的射影引出 $\epsilon(t)$ 是 $y(t)$ 的新息过程: $\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$ 是基于 $y(0), \dots, y(t-1)$ 对 $y(t)$ 的一步最优预报. 因此称 (2.12) 为 ARMA 新息模型. 注意, 在 (2.12) 中取常初值是非本质的, 由 $D(q^{-1})$ 的稳定性可证明^[4]: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 常初值对计算新息 $\epsilon(t)$ 的影响将消失.

3 引理

下述引理及其证明见文^[4], 这里证明从略.

引理 1 对完全可观系统 (2.1), (2.2), 基于 $(y(0), \dots, y(t))$ 对 $x(t+1)$ 的非递推最优 (线性最小方差) 预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 为

$$\hat{x}(t+1|t) = \Omega^+ \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+\beta|t) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

其中 Ω 和 β 由 (2.3) 定义, 广义逆 $\Omega^+ = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T$, $\hat{y}(t+i|t)$ 是基于 $(y(0), \dots, y(t))$ 对 $y(t+i)$ 的最优预报器, 可递推计算为

$$A(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+i|t) = D_i(q^{-1})\epsilon(t+i), \quad i = 1, 2, \dots, \beta. \quad (3.2)$$

其中 $A(\tilde{q}^{-1})$ 是只对 $\hat{y}(t+i|t)$ 的第一个时标 $(t+i)$ 运算的 $A(q^{-1})$. $D_i(q^{-1}) = D_i q^{-i} + \dots + D_{n_d} q^{-n_d}$; $D_i(q^{-1}) = 0 (i > n_d)$, 且规定 $\hat{y}(j|i) = y(j) (j \leq i)$. 新息 $\epsilon(t)$ 可由 (2.12) 递推计算为

$$\epsilon(t) = A(q^{-1})y(t) - D_1\epsilon(t-1) - \dots - D_{n_d}\epsilon(t-n_d), \quad t = t_0 + n_d, t_0 + n_d + 1, \dots. \quad (3.3)$$

其中取初值 $(\epsilon(t_0), \dots, \epsilon(t_0 + n_d - 1))$.

引理 2 对完全可观系统 (2.1)、(2.2), 非递推最优预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 有稳态 Kalman 预报器形式

$$\hat{x}(t+1|t) = \Phi \hat{x}(t|t-1) + K_p \epsilon(t), \quad (3.4)$$

$$y(t) = H \hat{x}(t|t-1) + \epsilon(t). \quad (3.5)$$

其中稳态 Kalman 预报器增益 K_p 为

$$K_p = \Phi \Omega^+ \begin{bmatrix} I_m - Q_0 Q_e^{-1} \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{\beta-1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

其中系数阵 F_i 可递推计算为

$$F_i = -A_1 F_{i-1} - \dots - A_{n_d} F_{i-n_d}, \quad i = 1, 2, \dots, \beta-1. \quad (3.7)$$

其中 $F_0 = I_m$; $F_i = 0 (i < 0)$; $D_i = 0 (i > n_d)$.

注意, 由 (3.4)、(3.5) 有

$$\hat{x}(t+1|t) = \Psi \hat{x}(t|t-1) + K_p y(t). \quad (3.8)$$

其中矩阵 $\Psi = \Phi - K_p H$.

引理 3 带初值 $(\epsilon(t_0), \dots, \epsilon(t_0 + n_d - 1))$ 的 ARMA 新息模型 (3.3) 等价于带如下初值 $\hat{x}(t_0|t_0-1)$ 的状态空间新息模型 (3.4)、(3.5),

$$\hat{x}(t_0|t_0-1) = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{\nu-1} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} y(t_0) - \epsilon(t_0) \\ y(t_0+1) - HK_p \epsilon(t_0) - \epsilon(t_0+1) \\ \vdots \\ y(t_0+\beta-1) - \sum_{i=0}^{\nu-2} H\Phi^{\nu-2-i} K_p \epsilon(t_0+i) - \epsilon(t_0+\nu-1) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

其中 $\nu = n_d (n_d \geq \beta)$; $\nu = \beta (n_d < \beta)$, 且此时 $\epsilon(t_0 + n_d), \dots, \epsilon(\beta-1)$ 通过 (3.3) 由初值 $(\epsilon(t_0), \dots, \epsilon(t_0 + n_d - 1))$ 递推计算. 即在上述初值对应关系 (3.9) 下, (3.3) 与 (3.4)、(3.5)

产生相同的 $\varepsilon(t)$.

由 (3.1)~(3.3) 看到, $\varepsilon(t)$, $\hat{y}(t+k|t)$ 和 $\hat{x}(t+1|t)$ 的计算与 (3.3) 的初值选取有关, 是否它们渐近地不依赖于 (3.3) 初值的选取? 如下引理 4 成立.

引理 4 新息 $\varepsilon(t)$, $\hat{y}(t+k|t)$ 和 $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近稳定的, 即任取 (3.3) 的两组初值 $(\varepsilon^{(1)}(t_0)^T, \dots, \varepsilon^{(1)}(t_0+n_d-1)^T)^T \in R^{m_d}$, $i=1,2$, 相应的 $\varepsilon^{(i)}(t)$, $\hat{y}^{(i)}(t+k|t)$ 和 $\hat{x}^{(i)}(t+1|t)$ 有关系: 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)}(t) - \varepsilon^{(2)}(t) &\rightarrow 0, \hat{y}^{(1)}(t+k|t) - \hat{y}^{(2)}(t+k|t) \rightarrow 0, \\ \hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t) &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

且 R^{m_d} 叫全局渐近稳定域.

为了研究渐近最优性, 首先定义稳态最优新息 $\varepsilon^{(0)}(t)$ 和稳定最优预报器 $\hat{y}^{(0)}(t+i|t)$ 和 $\hat{x}^{(0)}(t+1|t)$. 在 (2.12) 中置 $z(t) = A(q^{-1})y(t)$, 则有 $z(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t)$. 不论 $y(t)$ 是否为平稳序列, MA 过程 $z(t)$ 总是平稳序列. 因而当 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时, 稳态最优新息过程 $\varepsilon^{(0)}(t)$ 定义为^[4]

$$\varepsilon^{(0)}(t) = D^{-1}(q^{-1})z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j z(t-j). \quad (3.11)$$

其中 Ψ_j 可由关系 $I_m = D(q^{-1})(\Psi_0 + \Psi_1 q^{-1} + \dots)$ 递推计算为

$$\Psi_j = -D_1 \Psi_{j-1} - \dots - D_{n_d} \Psi_{j-n_d}, \quad \Psi_0 = I_m; \quad \Psi_j = 0 (j < 0). \quad (3.12)$$

由 $D(q^{-1})$ 的稳定性和 $z(t)$ 的平稳性可证明 (3.11) 在均方意义下收敛^[5]. 在 (3.1)、(3.2) 中以 $\varepsilon^{(0)}(t)$ 代替 $\varepsilon(t)$ 定义稳态最优预报器 $\hat{y}^{(0)}(t+i|t)$ 和 $\hat{x}^{(0)}(t+1|t)$ 分别为

$$A(\bar{q}^{-1})\hat{y}^{(0)}(t+i|t) = D_i(q^{-1})\varepsilon^{(0)}(t+i), \quad i=1,2,\dots,\beta, \quad (3.13)$$

$$\hat{x}^{(0)}(t+1|t) = \Omega^+ \begin{bmatrix} \hat{y}^{(0)}(t+i|t) \\ \vdots \\ \hat{y}^{(0)}(t+\beta|t) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

引理 5 $\varepsilon(t)$, $\hat{y}(t+i|t)$ 和非递推 $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近最优的, 即对 (3.3) 的任意初值 $(\varepsilon(t_0)^T, \dots, \varepsilon(t_0+n_d+1)^T)^T \in R^{m_d}$, 相应的 $\varepsilon(t)$, $\hat{y}(t+i|t)$ 和 $\hat{x}(t+1|t)$ 有关系: 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^{(0)}(t) \rightarrow 0, \hat{y}(t+i|t) - \hat{y}^{(0)}(t+i|t) \rightarrow 0, \hat{x}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t) \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

且 R^{m_d} 叫全局渐近最优域.

4 主要结果

定理 1 对于基于 (3.3) 初值 $(\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(n_d-1))$ 的非递推 $\hat{x}(t+1|t)$, 下述三个命题是等价的:

- i) $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近最优的;
- ii) $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近稳定的;
- iii) $D(q^{-1})$ 是稳定的.

证 i) $\Rightarrow$ ii). 任取 (3.3) 的两组初值 $(\varepsilon^{(1)}(0), \dots, \varepsilon^{(1)}(n_d-1))$, $i=1,2$, 由 i) 成立有 $(\hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty), i=1,2$, 于是 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$(\hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t)) = [(\hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)) - (\hat{x}^{(2)}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t))] \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

ii) \$\Rightarrow\$ iii). 由 ii) 成立和 (3.1) 有 \$(\hat{y}^{(1)}(t+j|t) - \hat{y}^{(2)}(t+j|t)) \rightarrow 0\$ (\$t \rightarrow \infty\$), \$j = 1, 2, \dots, \beta\$. 特别由 (3.2) 有

$$\hat{y}^{(1)}(t+1|t) - \hat{y}^{(2)}(t+1|t) = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \delta(t+1-i) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.2)$$

其中 \$\delta(t) = \epsilon^{(1)}(t) - \epsilon^{(2)}(t)\$. 因 \$\epsilon^{(1)}(t)\$ 和 \$\epsilon^{(2)}(t)\$ 都满足 (3.3), 这引出

$$D(q^{-1})\delta(t) = 0. \quad (4.3)$$

在 (4.3) 中置 \$t = t+1\$ 并利用 (4.2) 有

$$\delta(t+1) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.4)$$

引入状态变量 \$\theta(t) = [\delta^T(t), \delta^T(t-1), \dots, \delta^T(t-n_d+1)]^T\$, 则 (4.3) 有状态空间模型

$$\theta(t+1) = M\theta(t). \quad (4.5)$$

其中状态转移阵 \$M\$ 有典型型

$$M = \begin{bmatrix} -D_1 & -D_2 & \cdots & \cdots & -D_{n_d} \\ I_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

对于 \$t \geq n_d\$, \$\theta(t)\$ 可由 (4.5) 的初值 \$\theta(n_d-1) = [\delta^T(n_d-1), \dots, \delta^T(0)]^T\$ 决定. 由初值 \$(\epsilon^{(i)}(0), \dots, \epsilon^{(i)}(n_d-1))\$ 的任意性, \$i = 1, 2\$, 引出初值 \$\theta(n_d-1)\$ 具有任意性. 因而由 (4.4) 引出系统 (4.5) 是渐近稳定的, 即任取初值 \$\theta(n_d-1)\$, 有 \$\theta(t) \rightarrow 0\$ (\$t \rightarrow \infty\$), 从而矩阵 \$M\$ 稳定的^[11], 即以 \$q^{-1}\$ 为变元的多项式 \$\det(I_{mn_d} - q^{-1}M)\$ 的零点在单位圆外, 注意

$$\det(I_{mn_d} - q^{-1}M) = \det D(q^{-1}). \quad (4.7)$$

从而 \$D(q^{-1})\$ 是稳定的.

iii) \$\Rightarrow\$ i) 见引理 5. 证明见文 [4]. 证毕.

定理 2 稳态最优预报器 \$\hat{x}^{(0)}(t+1|t)\$ 可递推为

$$\hat{x}^{(0)}(t+1|t) = \Phi \hat{x}^{(0)}(t|t-1) + K_p \epsilon^{(0)}(t), \quad (4.8)$$

$$y(t) = H \hat{x}^{(0)}(t|t-1) + \epsilon^{(0)}(t). \quad (4.9)$$

或置 \$\Psi = \Phi - K_p H\$ 时有

$$\hat{x}^{(0)}(t|t-1) = \Psi \hat{x}^{(0)}(t|t-1) + K_p y(t). \quad (4.10)$$

称 (4.8)、(4.9) 或 (4.10) 为稳态最优 Kalman 预报器.

证 取初始时刻为 \$t_0\$, 由引理 3, 带初值 \$(\epsilon(t_0), \dots, \epsilon(t_0+n_d-1))\$ 由引理 3, 带由 (3.3) 给出的 \$\epsilon(t)\$ 等于带初值 (3.9) 由 (3.4)、(3.5) 给出的 \$\epsilon(t)\$. 由 \$z(t)\$ 和 \$\epsilon^{(0)}(t)\$ 的定义有 \$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon^{(0)}(t)\$, 又 \$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon(t)\$, 定义 \$\delta(t) = \epsilon(t) - \epsilon^{(0)}(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_m(t))^T\$, 则得到 \$D(q^{-1})\delta(t) = 0\$. 将其左乘以 \$\text{adj} D(q^{-1})\$ 引出差分方程

$$\det D(q^{-1})\delta_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.11)$$

设 \$\det D(q^{-1}) = 0\$ 有相异实根 \$\alpha_i, i = 1, 2, \dots, mn_d\$, 令 \$\lambda_i = 1/\alpha_i\$, 则 (4.11) 有通解^[12]:

$$\delta_i(t) = c_i \lambda^{(t-t_0)} + \dots + c_{mn_d} \lambda_{mn_d}^{(t-t_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.12)$$

其中 c_i 为任意实数. 由 $D(q^{-1})$ 的稳定性有 $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, mn_d$. 于是 $\delta_i(t) \rightarrow 0 (t_0 \rightarrow -\infty), i = 1, 2, \dots, m$, 即 $\epsilon(t)$ 是渐近最优的: $\epsilon(t) \rightarrow \epsilon^{(0)}(t) (t_0 \rightarrow -\infty)$. 因而由 (3.1) 和 (3.2) 有 $\hat{x}(t+1|t) \rightarrow \hat{x}^{(0)}(t+1|t) (t_0 \rightarrow -\infty)$. 在 (3.4) 和 (3.5) 中令 $t_0 \rightarrow -\infty$ 取极限引出 (4.8) 和 (4.9). 将 (4.9) 代入 (4.8) 有 (4.10). 对于 $\det D(q^{-1}) = 0$ 有重根或复根情形类似可证明定理 2 仍成立. 证毕.

定义 1 带初值 $\hat{x}(0|-1)$ 的稳态 Kalman 预报器 (3.4)、(3.5) 叫全局渐近最优的, 假如任取 $\hat{x}(0|-1) \in R^n$, 相应地有 $(\hat{x}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. R^n 叫 $\hat{x}(t+1|t)$ 的全局渐近最优域.

定义 2 稳态 Kalman 预报器 (3.4)、(3.5) 叫全局渐近稳定的, 假如任取初值 $\hat{x}^{(1)}(0|-1) \in R^n, \hat{x}^{(2)}(0|-1) \in R^n$, 相应地有 $(\hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, R^n 叫 $\hat{x}^{(1)}(t+1|t)$ 的全局渐近稳定域.

定理 3 对于稳态 Kalman 预报器 (3.4)、(3.5), 下述三个命题是等价的:

- i) $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近最优的;
- ii) $\hat{x}(t+1|t)$ 是全局渐近稳定的;
- iii) $\Psi = \Phi - K_p H$ 是稳定的.

证 i) $\Rightarrow$ ii) 由 (4.1) 得证.

ii) $\Rightarrow$ iii). 任取 $\hat{x}^{(0)}(0|-1) \in R^n, i = 1, 2$, 令 $\tilde{x}(t+1|t) = \hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t)$. 则 $\tilde{x}(0|-1)$ 也是任取的, 且由 ii) 有 $\tilde{x}(t+1|t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 又由 $\hat{x}^{(i)}(t+1|t), i = 1, 2$, 都满足 (3.8), 于是有误差系统 $\tilde{x}(t+1|t) = \Psi \tilde{x}(t|t-1)$. 这表明此系统是渐近稳定的, 从而引出 Ψ 是稳定的^[11].

iii) $\Rightarrow$ i) 任取 $\hat{x}(0|-1) \in R^n$, 令 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) = \hat{x}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)$, 则由 (3.8) 和 (4.10) 有 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) = \Psi \tilde{x}^{(0)}(t+1|t)$. 由 Ψ 稳定性有 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 即 i) 成立. 证毕.

定义 3 稳态 Kalman 预报器 (3.4)、(3.5) 叫局部渐近最优的, 假如存在一个非空子集 $R_L \subset R^n$, 使任取 $\hat{x}(0|-1) \in R_L$, 有相应的 $\hat{x}(t+1|t)$ 满足: $(\hat{x}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. R_L 叫 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近最优域.

注意, R_L 与它的构造方法有关, 因而不是唯一的. 如 $R_L = R^n$, 则化为全局渐近最优域.

定义 4 设 R_{LG} 稳态 Kalman 预报器的一个局部渐近最优域, 且对任何其他局部渐近最优域 R_L , 都有 $R_L \subset R_{LG}$, 则 R_{LG} 叫最大局部渐近最优域.

显然, R_{LG} 是唯一的.

定义 5 稳态 Kalman 预报器 (3.4)、(3.5) 叫局部渐近稳定的, 假如存在一个非空子集 $S_L \subset R^n$, 使任取 $\hat{x}^{(i)}(0|-1) \in S_L, i = 1, 2$, 都有相应的 $\hat{x}^{(i)}(0|-1)$ 满足关系: $(\hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. S_L 叫 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近稳定域.

注意, 根据 S_L 构造方法的不同, S_L 是非唯一的. 例如假如 S_L 是 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近稳定域, 则 S_L 的任何一个非空子集也是一个局部渐近稳定域. 假如 R_L 是 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近最优域, 则利用 (4.1) 式容易证明: R_L 也必是 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近稳定域, 其逆不真. 这可用第 5 节的算例来说明. 因此, 对完全可观、非完全可控系统, 从应用角

度,局部渐近最优性较局部渐近稳定性更为重要.

定理 4 对完全可观系统(2.1)、(2.2),不论它是否完全可控,稳态 Kalman 预报器(3.4)、(3.5)总存在,且它总是局部渐近最优的,它的一个局部渐近最优域 R_L 为

$$R_L = \{\hat{x}(0|-1) | \forall \epsilon(i) \in R^m, i = 0, 1, \dots, n_d - 1; \hat{x}(0|-1) \text{ 用 (3.9) 置 } t_0 = 0 \text{ 计算}\}. \quad (4.13)$$

证 稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 存在性见引理 2. 任取 $\hat{x}(0|-1) \in R_L$, 其中 R_L 由(4.13)给出,由(3.9)它相应于(3.3)的初值 $(\epsilon(0), \dots, \epsilon(n_d - 1))$,再由引理 2 和引理 3,在上述初值对应关系(3.9)之下,非递推预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 与稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 在数值上是完全相等的. 由引理 5,相应的非递推预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 是渐近最优的,从而稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 也是渐近最优的,且 R_L 是 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近最优域.

证毕.

注意,由(4.13)和引理 5 知,局部渐近最优域 R_L 是非递推预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 的全局渐近最优域 R^{mn_d} 在映射(3.9)下在 R^n 中的映象 R_L ,见图 1 所示.

定理 5 对于完全可观系统(2.1)、(2.2),假设矩阵 $\Psi = \Phi - K_p H$ 有 n 个线性无关的特征向量, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})^T, i = 1, 2, \dots, n$, 对应的实特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则稳态 Kalman 预报器(3.4)、(3.5)是局部渐近最优的充要条件是 Ψ 至少有一个特征值的绝对值小于 1. 不妨设 $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, k, 1 \leq k \leq n$, 则其最大局部渐近最优域 R_{LG} 为

$$R_{LG} = \{\hat{x}(0|-1) | \hat{x}(0|-1) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i, \forall c_i \in R^1\}. \quad (4.14)$$

证 设稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}(t+1|t)$ 的初值为 $\hat{x}(0|-1)$, 令 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) = \hat{x}(t+1|t) - \hat{x}^{(0)}(t+1|t)$, 由(3.8)和(4.10)有差分方程 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) = \Psi \tilde{x}^{(0)}(t|t-1)$, 它有通解^[12]:

$$\tilde{x}^{(0)}(t|t-1) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i \lambda_i^t + \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i \lambda_i^t. \quad (4.15)$$

$\hat{x}(t+1|t)$ 渐近最优等价于 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 由假设 $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, k; |\lambda_i| \geq 1, i = k+1, \dots, n$, 注意到(4.15)中的常数 c_i 由初值 $\tilde{x}^{(0)}(0|-1) = \hat{x}^{(0)}(0|-1) - \hat{x}^{(0)}(0|-1)$ 决定,因而使 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) \rightarrow 0$ 等价于选择 $\tilde{x}^{(0)}(0|-1)$ 使 $c_i = 0, i = k+1, \dots, n$, 这等价于取 $\tilde{x}^{(0)}(0|-1)$ 为

$$\tilde{x}^{(0)}(0|-1) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i, \quad \forall c_i \in R^1. \quad (4.16)$$

从而所有使 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) \rightarrow 0$ 的 $\tilde{x}(0|-1)$ 的集合(即最大局部渐近最优域 R_{LG} 为

$$R_{LG} = \{\hat{x}(0|-1) | \hat{x}(0|-1) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i + \hat{x}^{(0)}(0|-1), \forall c_i \in R^1\}. \quad (4.17)$$

设 R_L 为由(4.13)给出一个局部渐近最优域,则有 $R_L \subset R_{LG}$. 在(3.9)中置 $t_0 = 0$ 和 $\hat{x}(0|-1) = 0$, 则可反解出相应的 $(\epsilon(0), \dots, \epsilon(n_d - 1))$, 因而 $\hat{x}(0|-1) = 0 \in R_L$, 于是也有 $\hat{x}(0|-1) = 0 \in R_{LG}$, 这样由(4.16)引出 $\hat{x}^{(0)}(0|-1)$ 具有形式

$$\hat{x}^{(0)}(0|-1) = \sum_{i=1}^k c_i^0 \alpha_i, \quad c_i^0 \in R^1. \quad (4.18)$$

将(4.18)代入(4.17)便得到(4.14). 证毕.

推论 5.1 对于完全可观系统(2.1)、(2.2), 矩阵 $\Psi = \Phi - K_p H$ 至少有一个特征值的绝对值小于 1.

证 由定理 4 和定理 5 得证.

注意在定理 5 中允许 Ψ 有相等的特征值的情形. 当 Ψ 有共轭复特征值时, 仍可找到差分方程 $\tilde{x}^{(0)}(t+1|t) = \Psi \tilde{x}^{(0)}(t|t-1)$ 的对应的两个线性无关解^[12], 因此定理 5 仍成立.

几何上 R_{LG} 是 R^n 中的 k 维线性流形(k 维子空间), 它由线性无关的 k 个特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 生成. 例如对于 $n=2, k=1, R_{LG}$ 是在 R^2 平面上由向量 α_1 所延伸的直线. 对于 $n=3, k=2, R_{LG}$ 是在三维空间 R^3 中由向量 α_1 和 α_2 所决定的平面, 见图 2 所示.

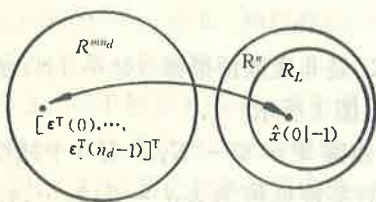


图 1 渐近最优域 R^{m+n} 到 R_L 的变换

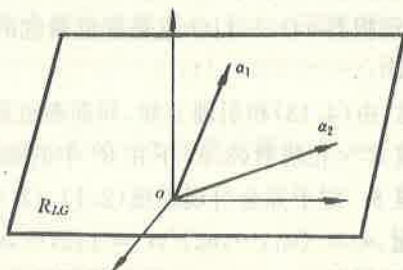


图 2 最大局部渐近最优域 R_{LG} 几何解释

5 算例和仿真结果

考虑完全可观、非完全可控系统(2.1)、(2.2)为

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} w(t), \quad (5.1)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) + v(t). \quad (5.2)$$

其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, n=2, m=1, \beta=2, w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值、方差为 $\sigma_w^2=1$ 和 $\sigma_v^2=1$ 的独立的高斯白噪声. 易导出 ARMA 新息模型为

$$(1 - q^{-1})y(t) = (1 + dq^{-1})\epsilon(t), \quad (5.3)$$

其中 $|d| < 1$, 新息 $\epsilon(t)$ 是零均值、方差为 σ_ϵ^2 的白噪声, 且

$$(1 + dq^{-1})\epsilon(t) = 5w(t-1) + (1 - q^{-1})v(t). \quad (5.4)$$

计算(5.4)两边随机序列的相关函数有

$$d\sigma_\epsilon^2 = -\sigma_v^2, \quad (1 + d^2)\sigma_\epsilon^2 = 25\sigma_w^2 + 2\sigma_v^2. \quad (5.5)$$

将 $\sigma_w^2=1, \sigma_v^2=1$ 代入(5.5)得二次方程 $d^2 + 27d + 1 = 0$, 可解出使 $(1 + dq^{-1})$ 稳定的 $d(|d| < 1)$ 为

$$d = (-27 + \sqrt{(27)^2 - 4})/2. \quad (5.6)$$

由(5.5)和(3.7)有 $\sigma_v^2/\sigma_\epsilon^2 = -d, f_1 = 1 + d$, 将它们代入(3.6)有

$$K_p = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \sigma_v^2/\sigma_\epsilon^2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + d \\ -0.2(1 + d) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

且稳态 Kalman 预报器为(3.8), 其中 $\Psi = \Phi - K_p H$ 为

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.1 - d & 0.5 \\ 0.2(1 + d) & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

注意 $\det(\lambda I_2 - \Psi) = (\lambda + d)(\lambda - 1.1)$, 则 Ψ 的特征值为 $\lambda_1 = -d, \lambda_2 = 1.1$. 因 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$. 于是 Ψ 是不稳定的, 由定理 3 有 $\hat{x}(t+1|t)$ 不是全局渐近最优的. 易求得与 λ_1, λ_2 相应的两个线性无关特征向量为^[12]

$$\alpha_1 = [1 \quad -0.2]^T, \quad \alpha_2 = [1 \quad 2(1+d)]^T. \quad (5.9)$$

由定理 5 有最大局部渐近最优域 R_{LG} 为

$$R_{LG} = \{\hat{x}(0|-1) | \hat{x}(0|-1) = c_1 \alpha_1, \forall c_1 \in \mathbb{R}^1\}. \quad (5.10)$$

如图 3 所示, 它是由特征向量 α_1 延伸的直线 R_{LG}

为了比较, 现在再由 (4.13) 求 $\hat{x}(t+1|t)$ 的一个渐近最优域 R_L . 由 (4.13) 和 (3.9), $\hat{x}(0|-1) \in R_L$ 当且仅当

$$\begin{aligned} \hat{x}(0|-1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2.2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) - \varepsilon(0) \\ y(1) - (1+d)\varepsilon(0) - \varepsilon(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y(0) - \varepsilon(0) \\ -0.2(y(0) - \varepsilon(0)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中由 (5.3) 有 $\varepsilon(1) = y(1) - y(0) - d\varepsilon(0)$. 于是 R_L 是 $\mathbb{R}^2$ 平面上重合于向量 $\alpha_1 = [1, -0.2]^T$ 的直线. 这引出 $R_L = R_{LG}$.

任取一条平行于 R_L 的直线 R_L^* . 如图 3 所示, 在 R_L^* 上任取两点 $\hat{x}^{(1)}(0|-1)$ 和 $\hat{x}^{(2)}(0|-1)$, 且过这两点分别做平行于坐标轴的直线, 交 x_1 轴于点 $(\omega_1, 0)^T$ 和 $(\omega_2, 0)^T$, 交 x_2 轴于点 $(0, \gamma_1)^T$ 和 $(0, \gamma_2)^T$, 交 R_L 点 $M = (\omega_1, -0.2\omega_1)^T$ 和 $N = (\omega_2, -0.2\omega_2)^T$. 几何上利用三角形全等关系易证明 $\gamma_1 - \gamma_2 = -0.2(\omega_1 - \omega_2)$, 从而有

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0|-1) &= \hat{x}^{(1)}(0|-1) - \hat{x}^{(2)}(0|-1) \\ &= (\omega_1 - \omega_2, \gamma_1 - \gamma_2)^T \\ &= \delta(1, -0.2)^T \in R_L. \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中 $\delta = \omega_1 - \omega_2$. 令 $\tilde{x}(t+1|t) = \hat{x}^{(1)}(t+1|t) - \hat{x}^{(2)}(t+1|t)$, 由 (3.8) 有差分方差 $\tilde{x}(t+1|t) = \Psi \tilde{x}(t|t+1)$, 应用 $\lambda_1 = -d$ 和 $\lambda_2 = 1.1$ 及 (5.9), 它有通解^[12]:

$$\tilde{x}(t|t-1) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix} (-d)^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2(1+d) \end{bmatrix} (1.1)^t. \quad (5.13)$$

在 (5.13) 中置 $t=0$ 并代入 (5.12) 可解出 $c_1 = \delta, c_2 = 0$. 由于 $|d| < 1$, 于是有 $\tilde{x}(t|t-1) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 这证明了 R_L^* 是 $\tilde{x}(t+1|t)$ 的一个局部渐近稳定域. 又 $R_L^* \subset \mathbb{R}^2 - R_{LG}$, 因此 R_L^* 不是局部渐近最优域. 取初值 $\hat{x}^{(1)}(0|-1) = (20, -4)^T \in R_L$, 并且取 $\hat{x}^{(2)}(0|-1) = (19, -4)^T \in \mathbb{R}^2 - R_L$, 仿真结果如图 4 和图 5 所示. 可看到 $\hat{x}^{(1)}(t+1|t)$ 跟踪 $x(t)$, 但 $\hat{x}^{(2)}(t+1|t)$ 发散.

6 结束语

同经典的 Lyapunov 方法^[3]和 Riccati 方程方法^[10]不同, 本文提出了稳态 Kalman 滤波稳定性和最优性研究的新方法和新途径, 发展了经典的 Kalman 滤波稳定性理论, 具有如下

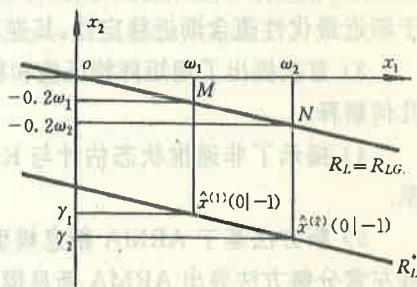


图 3 局部渐近最优域与渐近稳定域关系

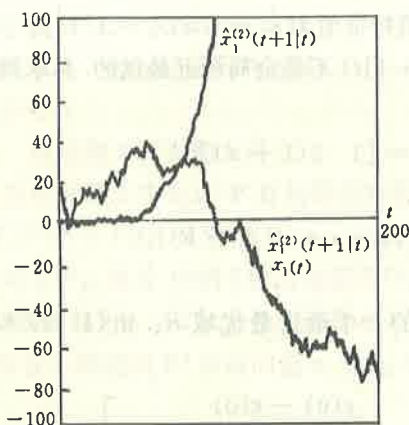


图 4 $x_1(t)$ 与稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}_1^{(1)}(t+1|t)$, $\hat{x}_1^{(2)}(t+1|t)$

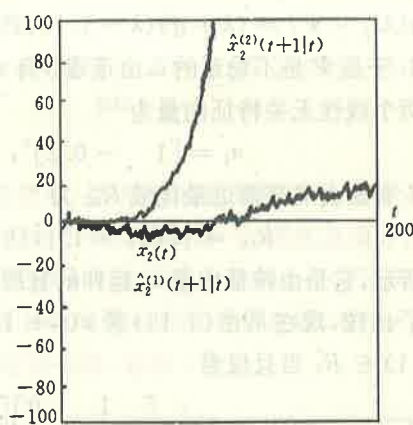


图 5 $x_2(t)$ 与稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}_2^{(1)}(t+1|t)$, $\hat{x}_2^{(2)}(t+1|t)$

特色:

- 1) 仅要求系统是完全可观的,而不要求完全可控条件.
- 2) 对完全可观、非完全可控系统分别提出了局部渐近最优和局部渐近稳定性概念. 由于渐近最优性蕴含渐近稳定性、其逆不真,因此从工程应用观点,渐近最优性更为重要.
- 3) 首次提出了用矩阵特征值和特征向量构造最大局部渐近最优域的新方法,并给出了几何解释.
- 4) 揭示了非递推状态估计与 Kalman 滤波的渐近最优性和渐近稳定性之间的相互关系.
- 5) 新方法基于 ARMA 新息模型和非递推状态估计理论^[4]. 本文给出了用有理分式矩阵左素分解方法导出 ARMA 新息模型,它不同于文[4]用矩阵求逆 Fadeeva 公式的方法.

参 考 文 献

- [1] 邓自立,周露. 单通道最优和自校正去卷平滑器及其应用. 信息与控制,1995,24(1):8-13
- [2] 陈福祥,朱家方. 线性系统控制理论. 武汉:武汉工业大学出版社,1990
- [3] Jazwinski, A. H.. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, 1970
- [4] Deng Zili et al.. Optimal and Self-Tuning White Noise Estimators with Applications to Deconvolution and Filtering Problems. Automatica, 1996, 32(2):199-216
- [5] 邓自立,郭一新. 现代时间序列分析及及其应用. 北京:知识出版社,1989
- [6] 邓自立,张焕水. 自校正 Kalman 滤波、预报、去卷、平滑新方法. 控制理论与应用,1994,11(2):137-145
- [7] 韩京清等. 线性系统理论代数基础. 沈阳:辽宁科学技术出版社,1985
- [8] Gevers, M. and Wouters, W. R. E.. An Innovations Approach to the Discrete-Time Stochastic Realization Problem. Journal A, 1978, 19(2):90-109
- [9] Jezek, J. and Kucera, V.. Efficient Algorithm for Matrix Spectral Factorization. Automatica, 1985, 21(6):663-669
- [10] Anderson, B. D. D. and Moore, J. B.. Optimal Filtering. Prentice-Hall, Inc., 1979
- [11] 王翼. 离散控制系统. 北京:科学出版社,1987
- [12] 王翼. 自动控制中的基础数学. 北京:科学出版社,1987

Local Asymptotic Stability and Optimality of Kalman Filtering

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

ZHANG Huanshui

(Research Centre of Automation, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: Using the modern time series analysis method and non-recursive state estimation theory, this paper presents local asymptotic stability and local asymptotic optimality concepts for systems which are completely observable, but are not completely controllable, and their relation is discussed. It is proved that this kind of systems is locally asymptotically optimal and locally asymptotically stable. A new approach for constructing the greatest local asymptotic optimality region is presented, and its geometrical explanation is given. The classical Kalman filtering stability theory is extended and developed. A calculation example and its simulation results are given to show the usefulness of the proposed results.

Key words: complete observable, non-complete controllable systems; steady-state Kalman predictor; local asymptotic optimality; local asymptotic stability; local asymptotic optimality region.

本文作者简介

邓自立 见本刊 1996 年第 4 期 526 页.

张焕水 见本刊 1996 年第 4 期 526 页.