# 线性控制系统时标分离的子空间方法*

陈陆平　席裕庚　$\boxed{\text{张钟俊}}$　　钱令希
（上海交通大学自动控制系·上海，200030）（大连理工大学工程力学所·大连，116023）

**摘要**：本文利用特征子空间的直接迭代(DI)法，给出了线性控制系统时标分离的子空间方法，并与时标分离的各种 Riccati-Like 迭代方法做了比较和分析.

**关键词**：线性系统；时标分离；特征子空间；子空间迭代

## 1 引　言

在多变量线性系统的控制问题中，基于时标分离的摄动方法有着十分广泛的应用[1]，近来它也为并行处理用于控制系统的分析与设计提供了有利条件. 寻求有效的计算方法，建立精确的系统时标分离解耦模型直接影响这些工作的成效，因而一直受到普遍关注[2,3].

本文在特征子空间直接迭代法[4]的基础上，根据已有的两种变换形式和相应的 Riccati 型(Riccati-like)迭代方法[1,3]，利用矩阵不变子空间的性质，考虑到对主子系统的认定有不同的策略，给出与各种 Riccati 型变换方式相对应的特征子空间方法，并分析了它们之间的关系.

## 2 系统的双时标模型与 Riccati 型迭代

给定能控能观的定常线性稳定系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_s\\ \dot{x}_f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_s\\ x_f\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_s\\ B_f\end{bmatrix}u, \tag{1}$$

$$y=[C_s\quad C_f][x_s^{\mathrm T}\quad x_f^{\mathrm T}]^{\mathrm T}.$$

其中　$x_1\in\mathrm{R}^{n_1},\quad x_2\in\mathrm{R}^{n-n_1},\quad u\in\mathrm{R}^{m},\quad y\in\mathrm{R}^{p}.$

通过线性变换，系统可以解耦为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_s\\ \dot{x}_f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_s & 0\\ 0 & A_f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_s\\ x_f\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_s\\ B_f\end{bmatrix}u, \tag{2}$$

$$y=[C_s\quad C_f][x_s^{\mathrm T}\quad x_f^{\mathrm T}]^{\mathrm T}.$$

式(2)称为(1)的双时标模型，其相应的变换应满足下列四种情形之一：

C① 系统阵的 $A_{21}$ 先消去，$\min|\sigma(A_f)|>>\max|\sigma(A_s)|$,

C② 系统阵的 $A_{12}$ 先消去，$\min|\sigma(A_f)|>>\max|\sigma(A_s)|$,

C③ 系统阵的 $A_{21}$ 先消去，$\min|\sigma(A_f)|<<\max|\sigma(A_s)|$,

C④ 系统阵的 $A_{12}$ 先消去，$\min|\sigma(A_f)|<<\max|\sigma(A_s)|$.

其中 $\sigma(\cdot)$ 为矩阵特征值集合，C①，C③ 对应的线性变换记为 $f$ 变换[1]：

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1994 年 9 月 24 收到. 1995 年 12 月 5 日收到修改稿.

$$x_f = x_2 + P_f x_1, \tag{3}$$

其中 $P^f$ 满足广义 Riccati 型方程：

$$R_f(P^f) = A_{21} + P^f A_{11} - A_{22}P^f - P^f A_{12} P^f = 0. \tag{4}$$

而 $C$①,$C$④的线性变换记为 $s$ 变换[1]：

$$x_s = x_1 + P^s x_2. \tag{5}$$

其中 $P^s$ 满足广义 Riccati 型方程：

$$R_f(P^f) = A_{12} + P^s A_{22} - A_{11}P^s - P^s A_{21} P^s = 0. \tag{6}$$

上述方程可以用 Riccati 型迭代方法求解，文[3]对此进行了综述，归纳为两类迭代格式，它们分别对应于在同一种时标条件下的 $f$ 变换和 $s$ 变换，即针对于 C③,C④ 的迭代格式，不妨记为 R③,R④：

$$\text{R③} \quad P^K_{K+1} = P^f_k - R_f(P^f_K)(A_{11} - A_{12}P^f_k)^{-1},$$

$$\text{R④} \quad P^s_{K+1} = P^s_k + (A_{11} + P^s_k A_{21})^{-1} R_s(P^s_K).$$

同样在另一种时标条件下，即对应于 C①,C②，我们可以给出相应 Riccati 型迭代格式，分别记为 R①,R②：

$$\text{R①} \quad P^f_{K+1} = P^f_k + (A_{22} + P^f_k A_{12})^{-1} R_f(P^f_K),$$

$$\text{R②} \quad P^s_{K+1} = P^s_k - R_s(P^s_K)(A_{22} - A_{22}P^s_k)^{-1}.$$

## 3 时标分离的子空间方法

文[4]研究了特征值模最大的主特征空间迭代法与通常所采用 Riccati 型时标分离迭代法之间的关系，并说明了这二种方法用于大系统的双时标分解时，有相同的收敛速率. 下面讨论更一般的情况：

**定理 1** 设矩阵 $V = [V_1^T \quad V_2^T]^T \in \mathrm{R}^{n\times n_1}$ 行向量构成 $A$ 的右不变子空间，即[4]：

$$AV = VF_f. \tag{7}$$

其中 $F_f \in \mathrm{R}^{n_1\times n_1}$,$V_1$ 可逆，则：

$$P^f = - V_2 V_1^{-1} \tag{8}$$

是方程(4)的解.

证 方程(4)可改写为

$$R_f(P^f) = [P^f \quad I]A[I \quad -(P^f)^T]^T, \tag{9}$$

设 $P^f = - V_2V_1^{-1}$ 代入得

$$[-V_2V_1^{-1} \quad I]A[I \quad (V_2V_1^{-1})^T)^T = [-V_2V_1^{-1} \quad I]AVV_1^{-1},$$

并由式(7)

$$= [-V_2V_1^{-1} \quad I]VF_fV_1^{-1} = (-V_2V_1^{-1}V_1 + V_2)F_fV_1^{-1}.$$

所以 $R_f(P^f) =)0$ 定理成立.

定理 1 给出了矩阵的块对角化的 $f$ 变换和 $A$ 阵的右不变子空间的关系，同样对于 $s$ 变换也不难证明有类似的关系：

**定理 2** 设矩阵 $W = [W_1 \quad W_2] \in \mathrm{R}^{n_1\times n}$ 的列向量构成 $A$ 的左不变子空间，即：

$$WA = F_sW. \tag{10}$$

其中 $F_f \in \mathrm{R}^{n_1\times n_1}$,$W_1$ 可逆，则

$$P^f = -W_1^{-1}W_2 \tag{11}$$

是方程(6)的解.

由定理1和定理2可知所有可以构成$A$不变子空间的向量组合都可以构造方程(4)或(6)的解,这里没有考虑双时标条件的要求,因而要进行系统的时标分离应该选用特殊的子空间.关于求解矩阵特征子空间的研究一直受到广泛注意.文[4]所构造的求解一般矩阵主特征子空间的直接迭代方法(DI法),可以用来求解矩阵的特征值模最大的左或右主特征子空间,也可以用来求解矩阵的特征值模最小的左或右主特征子空间.按习惯,称求特征值模最大的子空间的方法为正向迭代法,而称求特征值模最小的子空间的方法为逆向迭代法.这样利用定理1和定理2,子空间的正向迭代和逆向迭代法就可以求解方程(4)和方程(6),因此能够用来实现大系统的双时标分解.不难看出,它们与上一节提到的由变换过程和时标条件构成的组合有以下对应关系:

D① 右特征子空间逆向迭代 → C①,

D② 左特征子空间逆向迭代 → C②,

D③ 右特征子空间正向迭代 → C③,

D④ 左特征子空间正向迭代 → C④.

为说明时标分离的子空间DI法,下面将给出DI法的右子空间逆向迭代格式D①,并建立与Riccati型迭代格式R①的联系.

已知DI法的右子空间逆迭代格式为[4]:

$$AV^{(K+1)} = V^{(K)}F^{(K)}, \tag{12a}$$

$$F^{(K)} = (V^{(K)})^{(+)}AV^{(K)}, \tag{12b}$$

$$(V^{(K)})^{(+)} = ((V^{(K)})^{\mathrm{T}}V^{(k)})^{-1}(V^{(K)})^{\mathrm{T}}. \tag{12c}$$

其中,上标$(K)$标记迭代步数.

令:$P^f = -V_2V_1^{-1}$,则

$$V = [V_1^{\mathrm{T}} \quad V_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [I \quad -(P^f)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}V_1, \tag{13}$$

由式(12a)并把式(12b)和式(12c)代入有:

$$\begin{aligned} A[I \quad -(P^{j(K+1)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}V_1^{(K+1)} &= [I \quad -(P^{j(K)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}V_1^{(K)}F^{(K)} \\ &= [I \quad -(P^{j(K)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\pi^{(K)}. \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\pi^{(K)} = (I + (P^{j(K)})^{\mathrm{T}}(P^{f(K)})^{-1}[I \quad (P^{f(K)})^{\mathrm{T}}]A[I \quad -(P^{f(K)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}V^{(K)}$.

所以有:

$$\begin{cases} A_{11} - A_{12}(P^f)^{(K+1)} = \pi^{(K)}(V_1^{(k+1)})^{-1}, \\ A_{21} - A_{22}(P^f)^{(K+1)} = -P^{f(K)}\pi^{(K)}(V_1^{(k+1)})^{-1}, \end{cases} \tag{15}$$

$$P^{f(K+1)} = (A_{22} + P^{f(K)}A_{12})^{-1}(A_{21} + P^{f(K)}A_{11}). \tag{16}$$

从以上推导可以看出,由式(13)迭代解(D①)构造的$P^{f(K+1)}$与Riccati迭代格式R①的第$k+1$步迭代解$P_{k+1}^f$是一致的.同理可说明特征子空间迭代法与Riccati型迭代法的各种形式能够一一对应起来,而且它们具有相同的收敛性.

## 4 算 例

控制系统时标分离的效果,很重要的是看子系统的特征值对原系统的特征值的逼近精

度[5]，不同迭代方法的使用则是根据时标条件和子系统维数大小. 由本文方法讨论文[6]给出一个蒸汽动力系统，其离散形式描述：

$$X(k+1)=AX(k).$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 0.9014 & 0.1179 & 0.0525 & 0.0167 & 0.02104 \\ -0.0196 & 0.8743 & 0.0 & 0.025 & 0.02934 \\ -0.0071 & 0.7342 & 0.20175 & 0.013 & 0.21067 \\ -0.75 & -0.0557 & -0.032 & 0.19357 & -0.014076 \\ -0.306 & -0.01694 & -0.011 & 0.14278 & 0.013217 \end{bmatrix}.$$

$A$ 的特征值分布为：

$$\sigma(A)=(0.874167\pm 0.106356i, 2.080698\text{E-}02, 0.264183, 0.150911),$$

设系统两个慢变量，通常对于离散系统，记对应于特征值模较大的为慢子系统. 本问题中慢子系统维数小，所以可采用正向子空间迭代法. 迭代 38 次求出转换矩阵：

$$(P^s)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 11.125959 & -9.285893 & 10.311383 \\ -16.242749 & -9.146333 & 40.444772 \end{bmatrix}$$

时标分离后的解耦模型中，慢和快子系统阵为

$$A_s=\begin{bmatrix} 0.255410 & 0.272430 \\ -8.998865E-02 & -8.369130E-02 \end{bmatrix},$$

$$A_f=\begin{bmatrix} 0.785862 & -0.207265 & -3.180208E-02 \\ -0.519509 & -0.190162 & -0.477804 \\ 0.530347 & 1.326099 & 1.416818 \end{bmatrix}.$$

两个子系统对应的特征值分别为

$$\sigma(A_s)=(0.150911, 2.080698E-02),\quad \sigma(A_f)=(0.264183, 0.874167\pm 0.106365i).$$

# 5　结束语

时标分离是一种有效的系统分析和设计的简化方法，并行计算的控制理论中的应用，也使得建立解耦模型显得尤为重要，类似的 Ricatti 型二次矩阵方程在其他问题中也经常遇到，所以分析研究相应的解法是非常必要的. 本文目的是通过分析系统矩阵的特征子空间与 Ricatti 型方程解之间的关系，利用更为基本而成熟的子空间迭代法，求解构造原有的时标分离变换矩阵，这样即可以保留了原有变换方法为系统的整体变换和分析设计带来的便利之处，又能保证得到可靠的高精度解耦模型.

## 参 考 文 献

[1] Saksena, V. R., Oreilly, J. and Kakotovic, P. V.. Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976—1983. Automatica, 1984, 20: 273—293

[2] Phillips, R. G.. Reduced Order Modelling and Control of Two-Time-Scale Discrete Systems. Int. J. Control 1980, 31: 765—780

[3] Mahmoad, M. S.. Discrete Systems with Multiple Time Scales. Control and Dynamic Systems; Advance in Theory and Application, 1988, 27: 307—367

[4] 钱令希,陈陆平.动态系统降维的直接迭代(DI)方法.计算结构力学及其应用,1992,9(4):341-346

[5] Jamshidi,M..大系统建模与控制.北京:科学出版社,1986

[6] Phillips,R.G..The Equivalence of Time-Scale Decomposition Techniques Used in the Analysis and Design of Linear Systems.Int.J.Control,1983,37:1239-1259

# Subspace Methods for Time-Scale Decomposition of Linear Control System

CHEN Luping, XI Yugeng and ZHANG Zhongjun

(Department of Automation,Shanghai Jiaotong University • Shanghai,200030,PRC)

QIAN Lingxi

(Engineer Mechanical Research Institute,Dalian University of Technology • Dalian,116023,PRC)

**Abstract**: Based on the direct iteration of eigen-subspace,this paper presents the subspace method for time scale decomposition of linear control system,and analyzes the relations between the subspace methods and the Riccati-Like methods for system decomposition.

**Key words**: linear system; time-scale decomposition; eigen-subspace; direct iteration

## 本文作者简介

**陈陆平** 1964年生.1987年于北京大学获学士学位,1990年和1993年于大连理工大学分别获硕士和博士学位,1995年6月在上海交通大学自动控制系完成博士后科研工作,现为该系副教授.主要研究领域为:大系统理论,柔性结构控制,并行计算.

**席裕庚** 见本刊1996年第3期第304页.

**张钟俊** 见本刊1996年第2期第181页.

**钱令希** 1916年生.中科院院士,曾任中国力学学会理事长、大连工学院院长,现为大连理工大学工程力学研究所教授,博士生导师,感兴趣的领域:计算力学,结构控制.