非线性控制系统的反馈稳定化

刘晓平 盖如栋 张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)
(中科院机器人学开放研究实验室·沈阳,110015)

摘要: 本文采用微分几何方法,推出非线性系统可反馈稳定化的充要条件,并举例说明此方法可解决零动态系统方法及近似线性化方法所不能处理的问题.

关键词: 非线性系统; 稳定化; 状态反馈

1 引 言

系统的反馈稳定化问题是控制理论及控制工程中极其重要的问题. 线性系统的反馈稳定化问题已得到广泛深入的研究,获得了一些重要结论. 但是,非线性系统的反馈稳定化问题虽然也得到了大量的研究,但因问题复杂,还远未彻底解决. 尽管微分几何方法的引入给非线性控制系统的研究带来了一系列理论上的突破[1,2],但微分几何方法真正用于解决稳定化问题始于80年代中期[3]. 零动态系统概念的引入使微分几何方法能够处理某些线性化方法解决不了的稳定化问题[4]. 可此方法不仅需知道系统的输出,而且给出的条件也只是充分的. 可以说,对于输出未知的或零动态系统不稳定的系统来说,通过求零动态系统的方法或者相当困难或者无能为力. 为此,本文将利用微分几何方法给出解决反馈稳定化问题的另一途径,并推导出可状态反馈稳定化的充要条件,以弥补零动态系统方法的不足.

2 主要结果

考虑如下无输出仿射非线性控制系统:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i. \tag{2.1}$$

其中 $x \in M \subset \mathrm{R}^n$, f 和 g_i 均是 M 上的光滑向量场. 设 $x=0$ 是系统(2.1)的孤立平衡点. 在讨论反馈稳定化之前,先来看一个简单的例子.

例 1 考虑系统

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_6^2 + x_7^2 + e^{x_5}u_1, \\
&\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = x_5, \\
&\dot{x}_5 = x_2^2 + x_5^2 + e^{x_3}u_2, \quad \dot{x}_6 = x_1 + x_6, \quad \dot{x}_7 = -x_7, \\
&y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3.
\end{aligned}$$

易验证,此系统的零动态系统在 $x=0$ 点处不稳定. 因此,文献[1]中的零动态系统方法不能解决此问题. 实际上,此系统可用如下反馈来镇定,即:

$$u_1 = e^{-x_5}(-x_1 - x_2 - 2x_6 - x_6^2 - x_7^2), \quad u_2 = e^{-x_3}(-x_3 - x_2^2 - x_5^2).$$

* 国家自然科学基金委、国家教委、冶金部、辽宁省自然科学基金委等资助项目.
本文于1994年5月23收到,1995年12月13日收到修改稿.

从上例知:零动态系统方法不仅要求输出已知,而且对某些问题无能为力.为此,我们将给出另一种途径,来解决反馈稳定化问题.

首先引入如下分布: $\Delta = \mathrm{span}\{\mathrm{ad}_f^k g_i \mid i = 1,2,\cdots,m, k = 0,1,\cdots,n-1\}$.

显然 Δ 包含 $\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$. 另外假设 Δ 是非奇异的,侧 Δ 是 f 不变的. 因为:对任意的 i 有

$$ad_f^n g_i(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_i^k(x)\mathrm{ad}_f^k g_i(x) \in \Delta.$$

而且,对任意 $X\in\Delta$ 有: $$X(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} d_i^k(x) ad_f^k g_i(x).$$

因此,
$$\begin{aligned}[f,X] &= [f(x),X(x)] \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-2} d_i^k(x) ad_f^{k+1} g_i(x) + \sum_{i=1}^{m} d_i^{n-1}(x) ad_f^n g_i(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} [L_f d_i^k(x)] ad_f^k g_i(x) \in \Delta.\end{aligned}$$

然后,在 $x=0$ 点对 $f(x)$ 和 $g_i(x)$ 进行一阶近似: $f(x) = Ax + \bar{f}(x), g_i(x) = b_i + \bar{g}_i(x)$,其中 $A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$, $b_i = g_i(0)$, $\left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\bar{g}_i(0) = 0$.

容易验证,对任何 $k\geqslant 0$ 有

$$ad_f^k g_i(x) = (-1)^k A^k b_i + P_{ik}(x), \quad P_{ik}(0) = 0.$$

因此,Δ 在 $x=0$ 处的维数完全由矩阵

$$Q = [b_1, Ab_1,\cdots. A^{n-1}b_1,\cdots,b_m,Ab_m,\cdots,A^{n-1}b_m]$$

决定,即 $\dim\Delta(0) = \mathrm{rank}(Q)$.

最后,引入如下几个概念.假设 Δ 在 x_0 处非奇异对合,且维数为 k,则由 Frobenius 定理可知:存在 x_0 的一个邻域 U 及定义在此邻域上的局部光滑坐标变换 $z=\varphi(x)$,使得在 z 坐标中有: $$\Delta = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_k}\}.$$

这种坐标 z 叫做 Δ 的平整坐标[2].若 M 上的一个光滑向量场 X 在平整坐标中的表示为

$$X = (a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

那么,可定义新的向量场 $$X/\Delta \triangleq (a_{k+1},\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

至此可以给出本文的主要定理.

定理 如果分布 Δ 在 $x=0$ 处非奇异对合,则系统(2.1)在 $x=0$ 处可局部反馈渐近稳定化的充要条件是向量场 f/Δ 在 $x=0$ 处渐近稳定.

证 因为 Δ 是包含 $\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$ 的 f 不变的非奇异对合分布,所以由[2]中命题 2.2.6 知:在 $x=0$ 点的一个邻域上存在一个局部坐标 z,使得系统(2.1)在 z 坐标中可表示为

$$\dot{z}^1 = f^1(z^1,z^2) + \sum_{j=1}^{m} g_i(z^1,z^2)u_i, \tag{2.2a}$$

$$\dot{z}^2 = f^2(z^2). \tag{2.2b}$$

其中 $\dim(z^1) = \dim\Delta(0)$. 由 f/Δ 的定义知: $f/\Delta = f^2(z^2)$.

必要性. 由方程(2.2)即可看出:系统(2.1)在 $x=0$ 处可反馈渐近稳定化的必要条件是 $f^2(z^2)$ 在 $z=\varphi(0)$ 处渐近稳定,即 f/Δ 在 $x=0$ 处渐近的稳定.

充分性：设 f/Δ 在 $x=0$ 处渐近稳定，即 $f^2(z^2)$ 在 $z=\varphi(0)$ 处渐近稳定. 则只要说明系统

$$\dot{z}^1 = f^1(z^1, z^{2*}) + \sum_{j=1}^{m} g_i(z^1, z^{2*}) u_i. \tag{2.3}$$

在 z^{1*} 处可反馈渐近稳定化即可，其中$(z^{1*}, z^{2*}) = \varphi(0)$. 由于分布 Δ 在 $x=0$ 处非奇异，并且在 $x=0$ 点的维数为 z^1 的维数，则系统(2.3)在平衡的点(z^{1*}, z^{2*})处的近似线性化系统

$$\dot{z}^1 = \overline{A} z^1 + \overline{B} u$$

是一能控线性系统. 所以可采用线性反馈 $u = Fz^1$ 使得$(\overline{A} + \overline{B}F)$的所有特征值均位于左半平面内，进而导致闭环系统

$$\dot{z}^1 = f^1(z^1, z^{2*}) + \sum_{j=1}^{m} g_i(z^1, z^{2*}) F z^1$$

$$= (\overline{A} + \overline{B}F) z^1 + (\overline{f}^1(z^1, z^{2*}) + \sum_{j=1}^{m} \overline{g}_i(z^1, z^{2*}) F z^1) \tag{2.4}$$

的线性近似的所有特征值均具有负实部. 因此由 Lyapunov 第一近似定理知：非线性闭环系统(2.4)是渐近稳定的，即(2.3)可状态反馈渐近稳定化. 证毕.

值得注意的是：若 $\dim\Delta(0) = n$，则系统一定可反馈渐近稳定化[1].

下面给出反馈稳定化的具体算法：

1) 计算分布 $\Delta = \mathrm{span}\{ad_f^k g_i \mid i = 1, 2, \cdots, m, k = 0, 1, \cdots, n-1\}$.

2) 判断 Δ 是否非奇异对合，若不是，则说明本方法不适用.

3) 若 Δ 非奇异对合，且维数为 r，则从中选出 r 个线性无关的向量场，再任选 $n-r$ 个向量场使这 n 个向量场在 $x=0$ 点线性独立. 记这 n 个向量场为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

4) 按文献[2]的方法计算平整坐标 $x = F(z)$，其中

$$F(z) = \Phi_{z_1}^{X_1} \circ \Phi_{z_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \Phi_{z_n}^{X_n}(0).$$

5) 将变换 $F(z)$ 作用于系统(2.1)可求出 f/Δ. 由 f/Δ 的渐近稳定性便可知系统(2.1)的反馈渐近稳定化问题的可解性.

例 2 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - 3x_2 - x_3 - u, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 4x_2 - x_3. \end{aligned}$$

易验证此系统用近似线性化方法无法处理. 又因无输出，零动态方法也不大适用. 下面用本文方法解决此问题. 首先容易算出：

$$g = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad ad_f g = (-1, 3, -2)^{\mathrm{T}}, \quad ad_f^2 g = (-5, 13, 8)^{\mathrm{T}}.$$

即 $\dim\Delta(0) = 2$，然后求坐标变换

$$F(z) = \Phi_{z_1}^{X_1} \circ \Phi_{z_2}^{X_2} \circ \Phi_{z_3}^{X_3}(0).$$

其中 $X_1 = g, X_2 = ad_f g, X_3 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 经计算得 Δ 的平整坐标为

$$\begin{cases} z_1 = x_2 + \dfrac{3}{2} x_3, \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} x_3, \\ z_3 = x_1 + x_2 + x_3, \end{cases} \qquad \text{或} \qquad \begin{cases} x_1 = -z_1 - z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 + 3z_2, \\ x_3 = -2z_2. \end{cases}$$

在此坐标中,原系统变为

$$\dot{z}_1 = z_2 + z_3 - z_3^2 + u, \quad \dot{z}_2 = z_2 + 4z_2 + z_3, \quad \dot{z}_3 = - z_3^3.$$

由于 $f/\Delta = - z_3^3$,在 $z = 0$(即 $x = 0$) 处渐近稳定,所以系统可反馈渐近稳定化.

3 结 论

本文利用微分几何方法,给出一种新的判断非线性系统是否可反馈稳定化的途径.这种途径不但可解决近似线性化方法处理不了的临界问题,而且还能处理零动态系统方法所不能解决的问题.

致谢 本项研究得到浙江大学工业控制技术国家重点开放实验室及中科院自动化所复杂系统控制开放实验室的资助.在此,向他们表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989

[2] 程代展.非线性系统的几何理论.北京:科学出版社,1988

[3] Byrnes, C. I. and Isidori, A.. A Frequency Domain Philosophy for Nonlinear Systems with Application to Stabilization and to Adaptive Control. Proc. of the 23rd CDC, 1985, 1031-1037

[4] Byrbnes, C. I. and Isidori, A.. Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(10): 1122-1137

Feedback Stabilization of Nonlinear Control Systems

LIU Xiaoping, GAI Rudong and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

(Robotics Laboratory, the Chinese Academy of Sciences · Shenyang, 110015, PRC)

Abstract: This paper derives sufficient and necessary conditions, under which a nonlinear control system can be stabilized, by using the differential geometric method. Two examples are given to illustrate this method can handle the problems which can not be dealt with by the methods of zero dynamics or approximate linearization.

Key words: nonliear systems; stabilization; state feedback

本文作者简介

刘晓平 见本刊 1996 年第 1 期第 69 页.

盖如栋 1957 年生.1982 年毕业于阜新矿业学院,1994 年于东北大学自动控制系获博士学位,现为阜新矿业学院副教授.目前主要研究方向为大系统理论,鲁棒控制,复杂非线性控制系统的结构性质分析等,并在国内外发表学术论文二十余篇.

张嗣瀛 见本刊 1996 年第 1 期第 69 页.