第 13 卷第 5 期
1996 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 5
Oct., 1996

H_∞辨识中的代数方法*

黄学俊　　　王书宁　戴建设

(武汉市电信局·武汉,430071)　(华中理工大学系统工程研究所·武汉,430074)

摘要: 本文讨论了单输入、单输出、离散、时不变因果系统的面向控制的 H_∞ 辨识问题,在该问题中,中心估计是最优的,插值估计是次优的,但一般都难以求取,本文提出了非插值类的代数算法,该算法计算量小,所得模型简单且估计出的 Worst-Case 误差较小,该算法是收敛的,因而具有较好的实用价值.

关键词: Worst-Case 系统辨识; 未知但有界误差; 鲁棒辨识; 鲁棒控制

1 引　　言

在面向控制的系统辨识中,研究得多的是首先由 Helmicki, Jacobson 和 Nett 提出来的 Worst-Case 系统辨识问题[1,2],其方法是根据系统的先验范围和附加噪声的先验假设以及试验所得的输入输出数据来确定系统的名义模型并给出名义模型与真实系统之间的 Worst-Case 误差.

如果辨识对象是系统的传递函数,而辨识误差采用 H_∞ 范数度量,则称这样的辨识问题为 H_∞ 辨识,已经有许多 H_∞ 辨识算法被提出来,主要有二步非线性算法[3],但由于其惊人的计算量和所建模型的阶次太高,有人正寻求满足一定最优性条件的计算量少的算法,插值算法即为一例[4,5],但仍需求解一个大型的凸规划问题,其计算量仍相当惊人.

鉴于此,本文提出了基于代数方法的代数算法,该算法是非插值的,只需求解一个 $n\times n$ 下三角矩阵的逆矩阵,因此,其计算量少,且所得模型具有多项式形式,而估计出的 Worst-Case 误差比文[5]所估计的 Worst-Case 误差小.

2 有关记号及问题形式

设 Z, R 和 C 分别是整数集、实数集和复数集,记 $Z_+=\{k\in Z\,|\,k\geqslant 0\}$, $Z_{+,n}=\{k\in Z_+\,|\,k<n\}$,记 $R_+=\{x\in R\,|\,x\geqslant 0\}$,对任何正数 $\rho\in R_+$,定义集合 $D_\rho=\{z\in C\,|\,|z|<\rho\}$, $\partial D_\rho=\{z\in C\,|\,|z|=\rho\}$, $l_\infty=\{f: Z_+\to C\,|\,\|f\|_\infty=\sup_{k\in Z_+}|f_k|<\infty\}$, $H_{\infty,\rho}=\{f: D_\rho\to C\,|\,f$ 在 D_ρ 上解析且 $\|f\|_{\infty,\rho}=\sup_{z\in D_\rho}|f(z)|<\infty\}$. 本文对向量加下标总表示该向量的相应分量.

记 $H_+=U_{\rho>1}H_{\infty,\rho}$,则 H_+ 是线性空间. 对任意赋范空间 $(X,\|\cdot\|_X)$,记 $\overline{B}X(M)=\{x\in X\,|\,\|x\|_X\leq M\}$.

对任意 $n\in Z_+, n\geqslant 1$,定义投影算子 $P_n: l_\infty\to R^n$,其中 $(P_nf)_k=f_k, \forall\, k\in Z_{+,n}$,定义算子 $T_n: R^n\to R^{n\times n}$,对任意向量 $u=(u_0\,u_1\cdots u_{n-1})^T\in R^n$,有

* 国家自然科学基金、国家教委博士点基金、国家科委和浙江大学工业控制技术国家重点开放实验室的联合资助项目.
本文于 1994 年 11 月 21 日收到, 1996 年 6 月 24 日收到修改稿.

$$T_n u = T_n(u_0\, u_1 \cdots u_{n-1})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & u_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \cdots & u_0 \end{bmatrix}.$$

本文考虑指数稳定的单输入、单输出、线性、时不变、离散因果系统，设系统的脉冲响应序列为 $h = (h_0\, h_1 \cdots)$，其相应的传递函数为(取 h 的标准 z 变换在 $1/z$ 处的值)$\hat{h}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$.

指数稳定相当于先验已知两个正数 $M \geq 0$ 和 $\rho > 1$，使待辨识的系统 $\hat{h} \in \bar{B}\,\mathrm{H}_{\infty,\rho}(M)$.

设试验是系统的有限步输入响应，试验算子定义为 $E_n(\hat{h},v) = P_n = (h * u + v)$，其中 $\hat{h} \in \bar{\mathrm{B}}\mathrm{H}_{\infty,\rho(M)}$，$u$ 为有限输入序列，$h * u$ 为 h 与 u 卷积，对噪声 v 的先验假设是未知但有界，并设其误差上界为 ε，即 $v \in \bar{B}\, l_\infty(\varepsilon)$.

对于给定的先验信息和输入，所有可能得到的输出的集合记为 Y，则

$$Y = \{y \in \mathrm{R}^n \mid \text{若存在 } (\hat{h},v) \in \bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{H}_{\infty,\rho}(M) \times \bar{B}\, l_{\infty,\rho}(\varepsilon),\text{使 } y = T_n u P_n h + P_n v\}. \quad (1)$$

对任意输出 y，定义集合 $P(y)$：

$$P(y) = \{\hat{h} \in \bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{H}_{\infty,\rho}(M) \mid \text{若存在 } v \in \bar{B}\, l_\infty(\varepsilon) \text{ 使 } y_k = (E_n(\hat{h},v))_k, k \in Z_{+,n}\}. \quad (2)$$

对于所给的试验数据和先验信息，辨识算法 $\hat{A}_n$ 定义为 $\hat{A}_n:(E_n(\hat{h},v) \to H_+$. 若将 $\hat{A}_n: E_n(\hat{h},v))$ 作为系统的名义模型，则系统的名义模型与 $P(y)$ 之间的 Worst-Case 为

$$e(\hat{A}_n;\rho,M,\varepsilon,y) = \sup_{\hat{h}\in Y} \| \hat{h} - \hat{A}_n(y) \|_\infty. \quad (3)$$

由于这一误差与 y 有关，因此也称为局部辨识误差，定义全局辨识误差为

$$e(\hat{A}_n;\rho,M,\varepsilon) = \sup_{y\in Y} e(\hat{A}_n;\rho,M_\varepsilon;y). \quad (4)$$

更进一步，若 $\lim_{n\to\infty,\varepsilon\to 0} e(\hat{A}_n;\rho,M,\varepsilon) = 0$，则称辨识算法是收敛的.

3 基于代数方法的代数算法及其特点

对于给定的 n 和 $u \in \mathrm{R}^n$，$T_n u$ 是下三角矩阵，进一步设 $u_0 \neq 0$，则 $T_n u$ 是可逆的，不难证明：$(T_n u)^{-1}$ 也是下三角矩阵，且与 $T_n u$ 具有相似的结构，设

$$W = (T_n u)^{-1} = (W_0\, W_1 \cdots W_{n-1})^{\mathrm{T}} = T_n(w_0\, w_1 \cdots w_{n-1})^{\mathrm{T}}. \quad (5)$$

基于代数方法的代数算法 $\hat{A}_n$ 为

$$\hat{A}_n(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{sgn}(W_i^{\mathrm{T}} y) \min(|W_i^{\mathrm{T}} y| M/\rho^i) z^i. \quad (6)$$

下面证明，$\hat{A}_n(y) \in H_+$. 首先，关于先验假设 ρ, M 及脉冲响应序列，有如下引理.

引理 1 对任意传递函数 $\hat{h}$，$\hat{h} \in H_+$ 的充要条件是存在$(\rho,M) \in [1,\infty) \times [0,\infty)$，使 $\hat{h} \in \bar{B}H_{\infty,\rho}(M)$.

引理 2 对于给定的 $(\rho,M) \in [1,\infty) \times [0,\infty)$，若 $\hat{h} \in \bar{B}H_{\infty,\rho}(M)$，则 $\forall\, k \in Z_+$，有 $|h_k| \leqslant M\rho^{-k}$.

根据引理 1，可证明如下定理.

定理 1 由(6)式确定的 $\hat{A}_n(y) \in H_+$).

由定理 1 可知，$\hat{A}_n(y)$ 是 $E_n(\hat{h},v)$ 到 H_+ 的一个映射，因而 $\hat{A}_n(y)$ 可作为系统的一个估计，该估计具有如下特点：

1）该算法的计算是基于代数和矩阵运算的，只需求解一个 $n\times n$ 的下三角矩阵的逆矩阵，这与文[1]的 DFT 和文[5]的解凸规划问题相比，本算法计算量少.

2）该算法具有较强的直观含义，事实上，若观测误差为零，则应有 $P_n h=(T_n u)^{-1}y$，而当 $\varepsilon>0$ 时，$(T_n u)^{-1}y$ 可能不满足先验假设 $h\in \overline{B}l_{\infty,\rho}(M)$ 所要求的必要条件 $|h_i|\leqslant M/\rho^i$，$i\in Z_{+,n}$，因此，很自然地，算法 $\hat{A}_n(y)$ 就是首先求 $(T_n u)^{-1}y$，然后，若 $(T_n u)^{-1}y$ 的某一分量满足必要条件，则不变，而对不满足必要条件的分量分别用 M/ρ^i 或 $-M/\rho^i$ 代替.

3）该算法所辨识的模型具有较简单的多项式形式.

4）下一节还会证明，该算法所估计的 Worst-Case 误差比文[5]所估计的 Worst-Case 误差要小，因此，该算法具有较小的 Worst-case 误差.

4 代数算法的 Worst-Case 误差

引理 3　$\forall\, i\in Z_{+,n}, h\in P(y)$，有

$$|h_i-\mathrm{sgn}(W_i^{\mathrm{T}}y)\min(|W_i^{\mathrm{T}}y|,M/\rho^i)|\leqslant \min(2M/\rho^i,\varepsilon\sum_{k=0}^{i}|w_k|). \tag{7}$$

定理 2　关于局部 Worst-Case 误差，有

$$e(\overline{A}_n,\rho,M,\varepsilon;y)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\min(2M/\rho^i,\varepsilon\sum_{k=0}^{i}|w_k|)+\frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)}. \tag{8}$$

由于定理 2 中，对 $e(A_n,\rho,M,\varepsilon;y)$ 的估计与具体的 y 值无关，因此，关于全局 Worst-Case 误差，有如下定理.

定理 3　关于全局 Worst-Case 误差，有

$$e(\overline{A}_n,\rho,M,\varepsilon)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\min(2M/\rho^i,\varepsilon\sum_{k=0}^{i}|w_k|)+\frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)}. \tag{9}$$

注意到，算法 $\hat{A}_n$ 所得的 Worst-Case 误差界比文[5]中定理 4.2 所给的 Worst-Case 误差界小，并且不难证明：

$$\lim_{n\to\infty,\varepsilon\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\min(2M/\rho^i,\varepsilon\sum_{k=0}^{i}|w_k|)+\frac{M}{\rho^{n-1}(\rho-1)}\right)=0. \tag{10}$$

所以，根据定理 3，可以得到如下推论.

推论 1　H∞辨识算法 $\hat{A}_n(y)$ 是收敛的.

5 结束语

本文讨论了面向控制的 H∞系统辨识问题. 对于线性时不变因果系统，本文提出了 H∞辨识的代数算法并估计了其 Worst-Case 误差，与现有的 H∞辨识方法相比，该算法计算量少，具有明确的直观含义，且估计出的 Worst-Case 误差较小，并且该算法是收敛的. 虽然所提算法是非插值类算法，但其 Worst-Case 误差比插值算法小，由于插值算法在因子 2 的水平内是最优的，因此，代数算法在减小 Worst-Case 误差方面是非常有效的. 因此，从减少计算量和减少估计误差两方面看，本算法具有较好的应用意义.

参 考 文 献

[1] Helmicki, A. J., Jacobson, C. A. and Nett, C. N.. Control Oriented System Identification: A Worst-Case / Deterministic Approach in H∞. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36: 1163—1176

[2] Jacobson, C. A., Nett, C. N., Partington, R. J.. Wost-case System Identification in l_1: Optimal Algorithms and Error Bounds. System & Control Letter, 1992, 419—424

[3] Guoxing Gu and Khargonekar, P. P.. A Class of Algorithms for Identification in H_∞. Automatica, 1992, 28: 229—312

[4] Jie Chen, Nett, C. N., Michael, K. H.. Optimal Non-Parametric System Identification from Arbitrary Corrupt Finite Time Series: A Control-Oriented Approach. Proc. 1992 ACC, June, 1992, 279—285

[5] Jie Chen, Nett, C. N.. The Caratheodory-fejer Problem and H_∞ Identification: A Time Domain Approach. Proc. the 32nd CDC, December, 1993

An Algebra Approach in H_∞ System Identification

HUANG Xuejun

(Wuhan Telecom office · Wuhan, 430071, PRC)

WANG Shuning and DAI Jianshe

(Institute of System Engineering, Huazhong University of Science and technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: In this paper the robust control oriented H_∞ system identification problem is studied. The system is supposed to belong to the class causal, linear, shift-invariant systems. First, an algebraic algorithm based on algebraic approach is presented. Second, the characters of the algorithm is analysed. Finally, the worst-case identification error associated with the algorithm is evaluated and which shows the algorithm's convergence. Since the algorithm can obtain a simple model by less computation and the worst-case error is small, it is of practical value.

Key words: worst-case system identification; uncertainty but bounded error; robust control; robust identification

本文作者简介

黄学俊 1964年生. 1985年本科毕业于华中师范大学数学系, 1987年研究生毕业于湖北大学数学系, 曾为华中理工大学系统工程研究所博士生. 现为武汉市电信局职工. 主要研究兴趣: 系统建模, 系统辨识和参数估计.

王书宁 1982年获湖南大学学士学位, 1984年、1988年先后获华中理工大学硕士、博士学位, 现为华中理工大学系统工程研究所教授、博士生导师. 主要研究兴趣: 系统建模, 系统辨识, 参数估计及决策分析.

戴建设 1982年获上海交通大学学士学位, 1984年、1990年先后获华中理工大学硕士、博士学位, 现为华中理工大学系统工程研究所教授. 主要研究兴趣: 基于知识的计算机辅助系统, 分布式管理与决策信息系统, 系统建模及并行工程.