第 13 卷第 5 期
1996 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 5
Oct., 1996

H_∞鲁棒输出反馈设计方法*

丁宇清　施颂椒　胡庭姝

(上海交通大学自动化系·上海, 200030)

摘要：本文对结构式不确定系统给出了一种鲁棒输出反馈设计算法，首先导出了包括不确定因素在内的 H_∞范数作为鲁棒性指标，可用梯度法进行优化. 为了限制输出反馈阵 K 的高增益，在性能指标中附加了 K 的 Forbenius 范数作为惩罚项，并给出了相应的寻优算法，以求得合适的输出反馈阵. 算例表明，优化效果明显.

关键词：输出反馈；鲁棒控制；H_∞范数；结构式不确定性

1 引　言

H_∞优化方法是鲁棒控制中一种重要方法. 本文对结构式不确定系统用梯度法进行鲁棒输出反馈设计，是对现有结果的一个重要推广，本文以 H_∞范数

$$\| DH(sI - A - BKC)^{-1}GD^{-1} \|_\infty$$

作为鲁棒性指标[1]. 极小化这个 H_∞范数可利用 Hamilton 矩阵定义函数 $\rho(\varepsilon, K, D)$，并有以下关系式成立：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon, K, D) = 1 / \| DH(sI - A - BKC)^{-1}GD^{-1} \|_\infty.$$

即当 ε 趋于 0 时，$1/\rho(\varepsilon, K, D)$ 可逼近 $\| DH(sI - A - BKC)^{-1}GD^{-1} \|_\infty$. 由于 $\rho(\varepsilon, K, D)$ 对优化参数的偏导数可以求得[1]，因此可用梯度法极小化 $1/\rho(\varepsilon, K, D)$，从而极小化这个 H_∞范数性能指标.

本文给出了综合目标函数对优化参数的偏导数及相应的梯度算法. 实例计算结果表明，该算法简单、有效，使得输出反馈系统的闭环极点在一定区域内得以优化，大大提高了系统鲁棒性.

2 问题的描述

结构式不确定系统的状态空间描述为：

$$\dot{x} = (A + G\Delta H)x + Bu,$$
$$y = Cx. \tag{1}$$

其中，$x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^m$, $y \in \mathrm{R}^p$，分别为系统的状态、输入、输出向量，A, B, C, G, H 为适当阶的常数矩阵，Δ 为不确定矩阵，具有块对角结构：

$$\Delta = \text{block-diag}[\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N], \quad \Delta_i \in \mathrm{R}^{r_i \times r_i}, \quad \bar{\sigma}[\Delta_i] \leqslant \gamma.$$

式中 $\bar{\sigma}[\cdot]$ 表示矩阵最大奇异值. 设 $[A, B]$ 能控，$[A, C]$ 能观，求输出反馈控制律

$$u = Ky, \quad K \in \mathrm{R}^{m \times p},$$

使闭环系统

$$\dot{x} = (A + BKC + G\Delta H)x \tag{2}$$

* 获国家自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 5 月 19 日收到. 1996 年 1 月 15 日收到修改稿.

具有最大允许不确定界且闭环极点在一定区域内.

3 预备结果

定理 3.1[1]　系统(2)鲁棒稳定的充分条件是 $A+BKC$ 稳定,且

$$\inf_{D\in\Omega}\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty<1/\gamma.$$

其中 $\Omega=\{D,D=\text{block-diag}[d_1I_{r_1},d_2I_{r_2},\cdots,d_NI_{r_N}],d_i>0\}$.

此定理说明 H∞ 范数 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$ 越小,允许不确定界 γ 越大. 因此可选择 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$ 作为鲁棒性指标,通过适当选择 K,D 极小化这个 H∞ 范数,就可进行输出反馈设计.

定理 3.2　记

$$H(k,K,D)=\begin{bmatrix}-(A+BKC)^{\mathrm{T}} & -H^{\mathrm{T}}D^2H\\ k^2GD^{-2}G^{T} & A+BKC\end{bmatrix}. \tag{3}$$

则: 1) $H(k,K,D)$ 是 Hamilton 矩阵,其特征值关于虚,实轴都对称.

2) 当 k 逐渐增大时,$H(k,K,D)$ 必有一对特征值分别从左半平面和右半平面靠近虚轴,且有如下性质:

$1/\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty=\inf[k,H(k,K,D)$ 在虚轴上有特征值$]$.

证　1) 略[1].

2) 由文献[4]推论 1 易证.

推论　若记　$\rho(\varepsilon,K,D)=\min\{k,$存在 i 使 $\mathrm{Re}\lambda_i[H(k,K,D)]=-\varepsilon\}$.　(4)

则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho(\varepsilon,K,D)=1/\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty. \tag{5}$$

该推论说明利用由 $H(k,K,D)$ 定义的 $\rho(\varepsilon,K,D)$, 可求得 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$. 实际计算时[1],$\varepsilon$ 不必取很小,$1/\rho(\varepsilon,K,D)$ 便能很好地逼近 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$.

对于给定的 ε,下面分析 $\rho(\varepsilon,K,D)$ 的可微性.

定理 3.3　对于 K_0,D_0,记 $k_0=\rho(\varepsilon,K_0,D_0)$. 如果以下条件成立.

1) $H(k_0,K_0,D_0)$在$-\varepsilon+j\omega(\omega>0)$轴上只有一个特征值,记此特征值所在的特征轨迹是第 i 条.

2) $\partial\mathrm{Re}\lambda_i/\partial k|_{k=k_0,K=K_0,D=D_0}\neq 0$. ($\mathrm{Re}\lambda_i$ 表示第 i 个特征值 λ_i 的实部)

则在 $K=K_0,D=D_0$ 处,$\partial\rho(\varepsilon,K,D)/\partial K,\partial\rho(\varepsilon,K,D)/\partial D$ 存在,且

$$\left.\frac{\partial\rho(\varepsilon,K,D)}{\partial K}\right|_{K=K_0,D=D_0}=-\left.\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial K}\Big/\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial k}\right|_{k=k_0,K=K_0,D=D_0}, \tag{6a}$$

$$\left.\frac{\partial\rho(\varepsilon,K,D)}{\partial D}\right|_{K=K_0,D=D_0}=-\left.\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial D}\Big/\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial k}\right|_{k=k_0,K=K_0,D=D_0}. \tag{6b}$$

该定理给出了 $\rho(\varepsilon,K,D)$ 对于 K 及 D 的偏导数公式. 详细证明略[1].

4 优化问题及求解

4.1 目标函数

如果仅以 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$ 作为鲁棒设计的目标函数,那么类似[6]的结论,该目标函数的极小化会导致极点远离虚轴,产生高增益反馈阵和大的控制等. 为此,

本文考虑将K的Frobenius范数 $\|K\|_F$ 作为惩罚项,其惩罚因子β可根据需要灵活选取. 于是综合目标函数取为

$$J(K,D)=\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty+\beta\cdot\|K\|_F. \tag{7}$$

为了减小 $\|K\|_F$ 对 $\|\cdot\|_\infty$ 的影响,可令罚因子β在迭代的最后几步逐渐减小,这样可以着重对 $\|\cdot\|_\infty$ 加以优化,使 $\|\cdot\|_\infty$ 减小,允许不确定界γ增大. 由定理3.2推论,当ε取一小正数时,可将该目标函数等价为

$$J(K,D)=\frac{1}{\rho(\varepsilon,K,D)}+\beta\|K\|_F. \tag{8}$$

为使闭环系统的极点在一定区域内参与优化,本文增加极点限制条件:

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A+BKC)<-\alpha,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

式中$\alpha>0$为给定. 鲁棒输出反馈设计问题可转化为如下优化问题:

$$\min_{D\in\Omega,K} J(K,D)$$

$$\text{s.t.}\quad \mathrm{Re}\lambda_i(A+BKC)<-\alpha,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

式中$\Omega=\{D,D=\text{block-diag}[d_1I_{r_1},d_2I_{r_2},\cdots,d_NI_{r_N}],d_i>0\}$. 这个优化问题包括$K$及$D$两个优化参数,当目标函数趋向最小时,可以求得鲁棒输出反馈阵K^*,使鲁棒指标 $\|DH(sI-A-BKC)^{-1}GD^{-1}\|_\infty$ 和 $\|K\|_F$ 都令人满意.

4.2 目标函数的梯度

先给出矩阵迹的以下性质[7]:

1) $\mathrm{tr}X=\mathrm{tr}X'$, 2) $\mathrm{tr}XY=\mathrm{tr}YX$, 3) $\dfrac{\partial\mathrm{tr}AX}{\partial X}=A'_X$.

设K_0,D_0满足定理3.3的条件,记$H(k_0,K_0,D_0)$在$-\varepsilon+j\omega(\omega>0)$轴上的唯一特征值所在的特征轨迹为第$i$条. 由目标函数$J$表达式(8),根据定理3.3,可得$J$对优化参数$K$,$D$的偏导数:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial K}\right|_{K=K_0,D=D_0}=\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial K}\Big/\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial k}\cdot\rho^2\right)+\beta\left.\frac{\partial\|K\|_F}{\partial K}\right|_{k_0=\rho(\varepsilon,K_0,D_0)}, \tag{10a}$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial K}\right|_{K=K_0,D=D_0}=\left.\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial K}\Big/\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial k}\cdot\rho^2\right)\right|_{k_0=\rho(\varepsilon,K_0,D_0)}. \tag{10b}$$

设相应于λ_i的左、右特征向量为t',v,且$t'\cdot v=1$. 将t',v分块为:

$$t'=[t_1'\quad t_2'],\quad v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},\quad t_1,t_2,v_1,v_2\in\mathrm{R}^n.$$

对$\{K_{ij}\}\in\mathrm{R}^{m\times p}$有[1,7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_i}{\partial K_{ij}}&=\mathrm{Re}\{[t_1'\quad t_1']\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial(BKC)'}{\partial K_{ij}} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial(BKC)}{\partial K_{ij}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\\&=\mathrm{Re}[t_2'B\frac{\partial K}{\partial K_{ij}}Cv_2-t_1'C'\frac{\partial K'}{\partial K_{ij}}B'v_1]\\&=\mathrm{tr}\{\mathrm{Re}[C(v_2t_2'-t_1v_1')B]\cdot\frac{\partial K}{\partial K_{ij}}\}.\end{aligned}$$

根据性质(3)　$$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_i}{\partial K} = \mathrm{Re}\{[C(v_2t_2' - t_1v_1')B]'\}. \tag{11}$$

据式(3)　$$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_i}{\partial k} = \mathrm{Re}(2kt_2'GD^{-1}G'v_1). \tag{12}$$

同理可得　$$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_i}{\partial d_j} = \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[-2k^2G'v_1t_2'Gd_j^{-3} - 2Hv_2t_1'H'd_j)W_j]\}.$$

式中$W_j = \text{block-diag}[O_{r_1}, O_{r_2}, \cdots, O_{r_{j-1}}, I_{r_j}, O_{r_{j+1}}, \cdots, O_{r_N}]$，其中$O_{r_i}$表示$r_i$阶零矩阵，$I_{r_j}$表示$r_j$阶单位矩阵.

又　$$\frac{\partial \| K \|_F}{\partial K} = \frac{\partial(\mathrm{tr}(K'K)^{\frac{1}{2}})}{\partial K} = \frac{K}{\| K \|_F}. \tag{13}$$

将式(11)～(13)代入(10)可得$\partial J/\partial K_0, \partial J/\partial D_0$. 由于目标函数$J$的偏导数已知，因此可用梯度法寻优求取$K^*, D^*$.

在寻优过程中，惩罚因子β的选取很重要. 若闭环极点不满足式(9)(如在迭代开始几步). β应选小些，这样可以着重对J中$\|\cdot\|_\infty$项加以优化；使得$\|\cdot\|_\infty$减小. 此时闭环极点则逐渐左移而远离虚轴及$-\alpha \pm j\omega$轴，$\| K \|_F$也随之增大. 当闭环极点在$-\alpha \pm j\omega$轴以左时，为抑制K的增大和极点的远移，β应选大些以增强惩罚作用，使得$\| K \|_F$减小，闭环极点逐渐向$-\alpha \pm j\omega$轴移动，但$\|\cdot\|_\infty$会随之增大而使鲁棒稳定范围减小. 当闭环极点从左边靠近$-\alpha \pm j\omega$轴时，$\| K \|_F$已大为减小，这时可使β随迭代次数逐渐减小，这样既可以减小$\|\cdot\|_\infty$，对$\| K \|_F$和极点影响也不大，直至找到一个输出反馈阵K^*使$\| K \|_F$和鲁棒指标$\|\cdot\|_\infty$都满意为止.

5 算例分析

例 系统如下：

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = H = I_3.$$

令$\alpha = 1$，选初值：　$$K^0 = \begin{bmatrix} -50 & -10 \\ -40 & -8 \end{bmatrix}, \quad D^0 = \mathrm{diag}[1,1,1].$$

用梯度法迭代后得：

$$K^* = \begin{bmatrix} -2.5638 & -4.9492 \\ -6.9700 & -0.6758 \end{bmatrix}, \quad D^* = \mathrm{diag}[28.6026 \quad 5.7802 \quad 2.7876].$$

优化前后参数比较：

表1　优化前后的参数比较结果

	闭环特征值	$\| K \|_F$	$\|\cdot\|_\infty$
优化前	−6.7820，−31.9204，−0.4014	65.3857	3.1890
优化后	−4.3418±2.7651i，−4.1562	8.9502	0.2789

可见，用本文的优化算法使鲁棒指标$\|\cdot\|_\infty$和$\| K \|_F$较优化前都有很大改善. 作为比较，本文只对$\|\cdot\|_\infty$寻优后得：

$$K^* = \begin{bmatrix} -49.6545 & -12.0857 \\ -40.4442 & -5.2838 \end{bmatrix}, \quad D^* = \mathrm{diag}[1.9008 \quad 0.6474 \quad 0.2326].$$

此时 $\|\cdot\|_\infty = 0.2268$,闭环极点:$-5.3719 \pm 1.2043i$, -28.7343. 说明在 $\|\cdot\|_\infty$ 后加上 $\beta\|K\|_F$ 项后,虽然 $\|\cdot\|_\infty$ 稍微变大,但是 $\|K\|_F$ 更令人满意.

参 考 文 献

[1] 胡庭姝. 优化 H_∞ 范数的最新技术与鲁棒设计. 控制理论与应用,1995,12(3):297—309

[2] 胡庭姝,施颂椒,张钟俊. 时域鲁棒设计新方法. 自动化学报,1994,20(2):129—137

[3] 胡庭姝,施颂椒. 状态矩阵中含不确定性参数系统鲁棒性分析. 控制理论与应用,1989,9(5):533—537

[4] 张钟俊,施颂椒,胡庭姝. 通过传递函数的状态空间实现求 H_∞ 范数. 自动化学报,1991,17(2):215—219

[5] Hinrichse,D. ,et al. . Stability Radius for Structured Perturbations and the Algebaric Riccati Equations. Systems and Control Letters,1986,8:105—113

[6] Scherer C. . H_∞-Control by State Feedback:An Interactive Algorithm and Characterization of High Gain Occurence. Systems and Control Leetters,1989,12:383—391

[7] 须田信英,曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京:科学出版社,1979

Robust Design of H_∞ Output Feedback

DING Yuqing, SHI Songjiao and HU Tingshu

(Automation Department, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: This paper presents an algorithm for robust design of systems with structured uncertainty, using output feedback. First we provide a H_∞-norm including uncertain factors as robust index, which can be optimized with gradient method. In order to restrict the high gain of the output feedback matrix K, this paper considers the Frobenius-norm of K as a penalty term in the performance index. Finally the algorithm is provided to obtian the appropriate output feedback matrix. The numerical results show that its effect is ideal.

Key words: output feedback; robust control; H_∞-norm; structured uncertainty

本文作者简介

丁宇清 1969 年生. 1992 年 7 月毕业于华中理工大学自动控制系. 1995 年 3 月于上海交通大学自动化系获硕士学位,主要研究领域为鲁棒控制.

施颂椒 1933 年生. 现为上海交通大学自动化系教授. 博士生导师. 曾经从事过广义系统. 控制系统 CAD 等研究工作,近来主要从事鲁棒控制和自适应控制等研究工作.

胡庭姝 1966 年生. 分别于 1985 年、1988 年、1990 年于上海交通大学自动控制系获学士、硕士、博士学位,1995 年提升为教授. 主要研究方向是鲁棒控制和 H_∞-优化理论、实参数不确定系统的鲁棒控制.