第 13 卷第 6 期　　控制理论与应用　　Vol. 13, No. 6
1996 年 12 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1996

基于线性矩阵不等式的奇异 H_∞ 控制问题的降阶控制器*

郭　雷　忻　欣　冯纯伯
(东南大学自动化所·南京, 210018)

摘要：本文基于线性矩阵不等式方法研究了广义对象既具有无穷远零点又具有有限虚轴零点的奇异 H_∞ 问题的降阶控制器设计问题. 对于所述广义对象, 本文指出：若 H_∞ 控制问题可解, 则它必存在降阶控制器. 并给出了可行的降阶控制器设计方法.

关键词：H_∞ 控制；鲁棒控制；矩阵不等式；降阶控制器

1 引　言

考虑广义对象

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, w \in R^{m_1}, u \in R^{m_2}, z \in R^{p_1}, y \in R^{p_2}$ 分别表示状态、外部输入、控制、被控输出和量测信号. 所谓 H_∞ 标准控制问题是指[1]：求控制器 $u(s) = k(s)y(s)$, 使闭环系统内稳且使从 w 到 z 的传递函数 T_{zw} 满足 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$. 这里 γ 是一个事先给定的正常数, 不失一般性, 可设 $\gamma = 1$.

考虑一般的四块问题[1], 这时 $p_1 \leqslant m_2, p_2 \leqslant m_1$, 且设

A1　(A, B_2, C_2) 可镇定可检测.

这里 $A1$ 是存在镇定闭环系统的控制器的必要条件. 不失一般性, 又可设[2]

A2　$D_{11} = 0$,　$D_{22} = 0$.

H_∞ 控制问题是近年来控制理论界研究的热点之一. 对于一类正则 H_∞ 问题, 文[1]首先给出依赖于两个代数 Riccati 方程(ARE)的可解判据和 H_∞ 控制器；文[3]提出了基于 (J, J') 无损分解理论的统一处理正则和奇异 H_∞ 控制问题的 Descriptor Form 解法. 这些方法往往只给出阶次不超过广义对象 McMillan 阶次的控制器的设计准则.

文[6]研究了 $P_{12}(s)$ 或 $P_{21}(s)$ 只有一阶无穷远零点的奇异 H_∞ 问题降阶控制器的设计问题, 其解涉及一个降阶 ARE 和一个全阶 ARE 的反镇定解；文[7]考虑 $P_{12}(s)$ 和 $P_{21}(s)$ 在虚轴上具有无穷远零点的情形, 其解涉及二次矩阵不等式(QMI)的解法以及复杂的系统变换和运算过程. 上述结论都需要如下的假设：

A3　$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2, \quad \forall\, w \in R,$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p2, \quad \forall\, w \in R.$$

* 受国家自然科学基金(No. 69404009)和国家教委留学回国人员专项基金资助项目.
本文于 1995 年 6 月 19 日收到. 1995 年 12 月 27 日收到修改稿.

由于LMI方法可以处理$P_{12}(s)$和$P_{21}(s)$具有无穷远零点和有限虚轴零点的奇异H_∞控制问题,因而本文针对仅满足A1和A2的广义对象,引入LMI方法研究了降阶H_∞控制器的存在判据和设计准则.

2 预备知识

2.1 问题的转化

设$q_1 = \mathrm{rank}\, D_{12}, q_1 \leqslant m_2$. 存在$m_2$阶非奇异矩阵$N$,使

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} & 0 \\ \bar{D}_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中

a) $\bar{D}_{12}$为$p_1 \times q_1$阶矩阵,$\mathrm{rank}\bar{D}_{12} = q_1$;

b) B_{22}为$n \times q_2$阶矩阵,$\mathrm{rank}B_{22} = q_2$;

c) $q_1 + q_2 + q_3 = m_2$.

假设A4 $0 < q_2 < n, q_1 < m_2$. 平凡情形($q_2 = n, q_1 < m_2$)将在最后提及. 相应地记$v := N^{-1}u = (v_1^T\ v_2^T\ v_3^T)^T$,$v_1, v_2, v_3$分别为$q_1, q_2, q_3$维子向量. 则不难验证对(1)的$H_\infty$问题可转化为对(3)的$H_\infty$问题

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + (B_{21}\ B_{22}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ y = C_1 x + \bar{D}_{12} v_1, \\ z = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \tag{3}$$

取$\hat{B}_{22}$使$T := (\hat{B}_{22}\ B_{22})$为非奇异阵,则(3)又等价于

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \bar{B}_{211} & 0 \\ \bar{B}_{221} & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ z = (\bar{C}_{11}\ \bar{C}_{12}) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + (\bar{D}_{11}\ 0) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ v = (\bar{C}_{21}\ \bar{C}_{22}) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + D_{21} w. \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} := T^{-1}AT,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix} := T^{-1}B_1,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{211} & 0 \\ \bar{B}_{221} & I \end{bmatrix} := T^{-1}(B_{21}\ B_{22}),$$

$$(\bar{C}_{11}\ \bar{C}_{12}) := C_1 T,$$

$$(\bar{C}_{21}\ \bar{C}_{22}) := C_2 T.$$

下面将主要探讨满足A1,A2,A3时广义对象(4)的H_∞问题. 为讨论方便,略去(4)中各符号

的上划线.

2.2　H∞ 控制问题可解的 LMI 判据

针对(1),在假设 A1,A2 之下,记

$$\mathscr{L}_B:=\{X:X\in \mathrm{R}^{n\times n},X=X^{\mathrm{T}}>0,$$
$$\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}AX+XA^{\mathrm{T}}+B_1B_1^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}}\\ C_1X & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}}<0\},\tag{5}$$
$$\mathscr{L}_C:=\{Y:Y\in \mathrm{R}^{n\times n},Y=Y^{\mathrm{T}}>0,$$
$$\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}YA+A^{\mathrm{T}}Y+C_1^{\mathrm{T}}C_1 & YB_1\\ B_1^{\mathrm{T}}Y & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}}<0\},\tag{6}$$

其中 $E^{\perp}$ 定义为:$E^{\perp}E=0$ 且 $E^{\perp}E^{\perp\mathrm{T}}>0$. 显然 $E^{\perp\mathrm{T}}=\mathrm{Ker}(E^{\mathrm{T}})$.

引理 1[4,5]　对满足 A1,A2 的对象(1),存在 H∞控制器的充分必要条件是 $\mathscr{L}_D\neq 0$. 其中

$$\mathscr{L}_D:=\left\{(X,Y):X\in\mathscr{L}_B,Y\in\mathscr{L}_C,\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geqslant 0\right\}.\tag{7}$$

对(4),若设 $\begin{bmatrix}W_1\\W_2\end{bmatrix}:=\mathrm{Ker}(B_{211}^{\mathrm{T}}\ D_{12}^{\mathrm{T}})$其中 W_1,W_2 分别为$(n-q_2)\times(n+p_1-q_1-q_2)$,$p_1\times(n+p_1-q_1-q_2)$阶子矩阵. 则可以验证

$$\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}B_{211}^{\mathrm{T}} & B_{221}^{\mathrm{T}} & D_{21}^{\mathrm{T}}\\ 0 & I & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_1\\0\\W_2\end{bmatrix},\tag{8}$$

再将 X 作相应于(8)的分块

$$X:=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}\end{bmatrix},$$

因此对象(4)对应的 $\mathscr{L}_B$ 中的不等式应为

$$\begin{bmatrix}W_1\\0\\W_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A_{11}X_{11}+X_{11}A_{11}^{\mathrm{T}}+A_{12}X_{12}^{\mathrm{T}}+X_{12}A_{12}^{\mathrm{T}}+B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}} & * & X_{11}^{\mathrm{T}}C_{11}^{\mathrm{T}}+X_{12}C_{12}^{\mathrm{T}}\\ * & * & *\\ C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}^{\mathrm{T}} & * & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_1\\0\\W_2\end{bmatrix}<0,$$

这里“*”表示无关紧要的子矩阵. 由上式可得

$$\begin{bmatrix}W_1\\W_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A_{11}X_{11}+X_{11}A_{11}^{\mathrm{T}}+A_{12}X_{12}^{\mathrm{T}}+X_{12}A_{12}^{\mathrm{T}}+B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}} & X_{11}^{\mathrm{T}}C_{11}^{\mathrm{T}}+X_{12}C_{12}^{\mathrm{T}}\\ C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}^{\mathrm{T}} & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_1\\W_2\end{bmatrix}<0.\tag{9}$$

若设 $\mathscr{L}_B:=\{X:X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}\end{bmatrix}\in\mathrm{R}^{n\times n},X=X^{\mathrm{T}}>0$,且 X_{11}. X_{12}满足(9)},则我们利用引理 1 得到了下述定理,这里 $\mathscr{L}_C$ 中的各系数阵由(4)确定.

定理 1　对广义对象(4),存在 H∞控制器的充分必要条件是 $\mathscr{L}_D\neq 0$,其中

$$\mathscr{L}_D:=\{(X,Y):X\in\mathscr{L}_B,Y\in\mathscr{L}_C,\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geqslant 0\}.$$

由(9)式可见，X 的确定有较大的自由度，(9)涉及的 LMI 中矩阵的维数仅为 $(n-q_2+p_1)\times(n-q_2+p_1)$，且它与 X_{22} 无关，而 X_{11} 则可在给定一个合适的 X_{12} 的前提下确定.

3 主要结果

下面结论给出 H_∞ 降阶控制器的一个存在条件.

引理 2 以下叙述等价

i) 对满足 A1,A2 的对象(1)，存在 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$(对满足 A1,A2,A4 的对象(1)，存在 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$)，且满足 $n_c=\mathrm{rank}\ (X-Y^{-1})$；

ii) 相应的 H_∞ 问题存在 n_c 阶 H_∞ 控制器.

其中括号内的内容可结合上面的分析和文[5]证明. 显然有 $n_c\leqslant n$，而 $n_c<n$ 是降阶 H_∞ 控制器存在的关键. 但是此结论并未告诉我们对某个 H_∞ 问题来说是否一定存在降阶 H_∞ 控制器.

引理 3 i) 对(1)，设 T 为 n 阶正交矩阵，则 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$ 的充分必要条件是对(1)的一个等价对象，$(T^{\mathrm{T}}XT,T^{\mathrm{T}}YT)\in\mathscr{L}_D$.

ii) 对于(4)，设 $T=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$，$T_1$ 为 $n-q_2$ 阶正交矩阵，则 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$ 的充分必要条件是对(4)的一个等价对象，$(T^{\mathrm{T}}XT,T^{\mathrm{T}}YT)\in\mathscr{L}_D$.

证明可通过直接验证(5)、(6)、(9)式得到.

下面的定理是本文的一个主要结果.

定理 2 对于满足 A1,A2,A4 的(1)，下列叙述等价

i) H_∞ 问题可解；

ii) 存在 $n-q_2$ 阶降阶控制器.

证 ii)$\Rightarrow$i) 显然.

只证 i)$\Rightarrow$ii). 由第 2 节知(1)的 H_∞ 问题可转化为(4)的 H_∞ 问题. 由定理 1，对于(4)若存在 H_∞ 控制器，必有 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$，即 $X\in\mathscr{L}_B,Y\in\mathscr{L}_C,X-Y^{-1}\geqslant 0$.

设

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}\end{pmatrix},\quad Y^{-1}=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & Y_{22}\end{pmatrix},$$

考察

$$X-Y^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}-Y_{11} & X_{12}-Y_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}}-Y_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}-Y_{22}\end{pmatrix}.$$

a) 若 $X_{11}-Y_{11}>0$. 令 $Z:=(X_{11}-Y_{11})^{-1}(X_{12}-Y_{12})$，$\overline{X}_{22}=Y_{22}+(X_{12}^{\mathrm{T}}-Y_{12}^{\mathrm{T}})Z$，则有

$$\begin{pmatrix}X_{11}-Y_{11}\\ X_{12}^{\mathrm{T}}-Y_{12}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}Z=\begin{pmatrix}X_{12}-Y_{12}\\ \overline{X}_{22}^{\mathrm{T}}-Y_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad (\overline{X}_{22}\text{ 对称}),$$

若令

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & \overline{X}_{22}\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{rank}(\overline{X}-Y^{-1})=n-q_2$，且由主子式 $\geqslant 0$ 知 $\overline{X}-Y^{-1}\geqslant 0$，$\overline{X}>0$，又由假设知 $Y\in\mathscr{L}_C$，X_{11} 和 X_{12} 满足(9)，故 $(\overline{X},Y)\in\mathscr{L}_D$，由引理 2 知(4) 有 $n-q_2$ 阶 H_∞ 控制器.

b) 若 $X_{11}-Y_{11}\geqslant 0$，但 $X_{11}-Y_{11}\not> 0$. 设 $\mathrm{rank}\ (X_{11}-Y_{11})=t_1$. 存在 $n-q_2$ 阶正交矩阵 T_1，使 $T_1^{\mathrm{T}}(X_{11}-Y_{11})T_1=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，这里 $\mathrm{rank}\ Q_1=t_1$，$Q_1>0$，设

$$\begin{bmatrix}Q_1 & 0 & R_1\\ 0 & 0 & R_2\\ R_1^{\mathrm{T}} & R_2^{\mathrm{T}} & S\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}T_1^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11}-Y_{11} & X_{12}-Y_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}}-Y_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}-Y_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

这时考虑(4) 的一个等价对象：即令 $\bar{x}=\begin{bmatrix}T_1^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}x$，对(4) 作等价变换后所得的对象记为(4)′，由引理 3，对(4)′，定理 1 仍成立，即 $(T^{\mathrm{T}}XT,T^{\mathrm{T}}YT)\in\mathscr{L}_D$，此处 $T=\begin{bmatrix}T_1^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$.

若 $R_2=0$，令 $Z=Q_1^{-1}R_1$，$\overline{S}=\overline{X}_{22}-Y_{22}=R_1^{\mathrm{T}}Z=R_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}R_1$，进而 $\overline{X}_{22}=Y_{22}+R_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}R_1$，考虑 $\overline{X}=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & \overline{X}_{22}\end{bmatrix}$，由 $\overline{X}-Y^{-1}$ 的顺序主子式全大于或等于 0（前 t_1 阶大于 0，$t_1+1,t_1+2,\cdots,n$ 阶等于 0），故知 $\overline{X}-Y^{-1}\geqslant 0$，$\overline{X}>0$，且 $\mathrm{rank}(\overline{X}-Y^{-1})=t_1<n-q_2$，由引理 2 知对于(4)′ 有 t_1 阶 H_∞ 控制器.

下证 $R_2=0$，设

$$R_2=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1q_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{t_21} & r_{t_22} & \cdots & r_{t_2q_2}\end{bmatrix}_{t_2\times q_2}.$$

其中 $t_2=n-q_2-t_1$. 考虑 r_{ij}，$i=1,2,\cdots,t_2$，$j=1,2,\cdots,q_2$. 已知

$$\begin{bmatrix}Q_1 & 0 & R_1\\ 0 & 0 & R_2\\ R_1^{\mathrm{T}} & R_2^{\mathrm{T}} & S\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

取它的前 t_1 行，第 t_1+i 行和 $n-q_2+j$ 行与前 t_1 列，第 t_1+i 列和 $n-q_2+j$ 列形成的主子式 $\Delta_{ij}=(-1)r_{ij}^2\det Q_1$，由 $\Delta_{ij}\geqslant 0$ 知 $r_{ij}=0$. 故 $R_2=0$ 成立.　　证毕.

这个定理不仅给出了奇异 H_∞ 控制问题降阶控制器的存在判据，而且给出了设计方法. 对于满足 A1、A2、A4 的奇异 H_∞ 问题，可按如下步骤设计降阶控制器：

a) 将对象转化成(4) 的形式；

b) 求 $(X,Y)\in\mathscr{L}_D$，并设

$$X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}\end{bmatrix},\quad Y^{-1}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & Y_{22}\end{bmatrix};$$

c) 若 $X_{11}-Y_{11}>0$，则取 $T_1=I_{n-q_2}$，$Q_1=X_{11}-Y_{11}$，$R_1=X_{12}-Y_{12}$；若 $X_{11}-Y_{11}\geqslant 0$，但 $X_{11}-Y_{11}\not> 0$，求正交阵 T_1，使 $T_1^{\mathrm{T}}(X_{11}-Y_{11})T_1=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，这里 $\mathrm{rank}\ Q_1=\mathrm{rank}\ (X_1-Y_{11})$，设

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_1^{\mathrm{T}} & 0 & S \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} T_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} - Y_{11} & X_{12} - Y_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} - Y_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} - Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix};$$

d) 求出 $\overline{X}_{22} = R_1^{\mathrm{T}} Q_1^{-1} R_1 + Y_{22}$，令 $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & \overline{X}_{22} \end{bmatrix}$；以下过程可参考文[5]，或见附录.

最后考虑第 2 节中提出的平凡情形：此时 $q_1 < m_2, q_2 = n$，(2) 中 B_{22} 为 n 阶非奇异阵，应用引理 1，因 $\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp} = (0\ D_{12}^{\perp})$，故(5)表示的 $\mathscr{L}_B$ 退化为 $\mathscr{L}_B := \{X : X \in \mathrm{R}^{n \times n}, X = X^{\mathrm{T}} > 0\}$，因而对 $Y \in \mathscr{L}_C$，总可取 $X = Y^{-1}$，此时 $(X, Y) \in \mathscr{L}_D$，$\mathrm{rank}\ (X - Y^{-1}) = 0$，这时可利用文[5]定理 2 结合以上分析知定理 2 仍成立.

注意到 $n - q_2 = n - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \mathrm{rank}\ D_{12}$. 如果 A4 改为 $\mathrm{rank}\ D_{21} = r_2 < p_2$，则可以得到定理 2 的对偶结论，综合各种情况有

定理 3 对于满足 A1，A2 的(1)，下列叙述等价：

i) 奇异 H_∞ 问题可解；

ii) 存在 n_c 阶 H_∞ 控制器，其中

$$n_c \leqslant \min \left\{ n - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \mathrm{rank}\ D_{12}, n - \mathrm{rank}\ (C_2\ D_{21}) + \mathrm{rank}\ D_{21} \right\}.$$

因此，为了得到较低阶的 H_∞ 控制器，可以先比较 $n - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \mathrm{rank}\ D_{12}$ 和 $n - \mathrm{rank}\ (C_2\ D_{21}) + \mathrm{rank}\ D_{21}$ 的大小，然后再确定变换的方式，按照上面的过程进行设计.

4 结束语

本文研究了 H_∞ 控制问题的降阶控制器的设计问题. 得到了下述主要结论：若存在 H_∞ 控制器，则必然存在不超过 $n - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \mathrm{rank}\ D_{12}$ 或 $n - \mathrm{rank}\ (C_2\ D_{21}) + \mathrm{rank}\ D_{21}$ 阶的 H_∞ 控制器. 给出了基于 LMI 的 H_∞ 降阶控制器的存在判据和设计方法. 与基于 ARE[6] 和 QMI[7] 的方法相比，本文的方法除了具有文[4,5]指出的 LMI 方法本身在设计和算法上的优点之外，研究的对象也较为广泛，无需文[6,7]所需的假设 A3，而且本文的结果包含了文[6,7]中有关降阶 H_∞ 控制器的主要结论.

参 考 文 献

[1] Doyle, J. C., Glover, K. and Khargonekar, P. P. et al.. State Space Solutions to Standard H² and H^∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34: 831 — 847

[2] Safanov, M. G. et al.. Simplifying the H^∞ Theory via Loop shifting. Int. J. Control, 1980, 50: 2467 — 2488

[3] Xin, X. and Kimura, H.. Chain-Scattering Approach to Non-Standard H^∞ Control Problems. Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications (ed. Uwe Helmke, Reinhard Mennicken, Josef Saurer), Akademic Verlag, Berlin, 1994, I: 183 — 208

[4] Gahinet, P. and Apkarin, P.. An LMI-Based Parametrization of all H^∞ Controllers with Applications. Proc. of 32nd conf. on CDC, San Antonio, 1993, 656 — 661

[5] Iwasaki, T. and Skelton, R. E.. All Controllers for the General H^∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas. Automatica, 1994, 30: 1307 — 1307

[6] Kimura, H. et al.. On the Structure of H^∞ Conrolller Systems and Related Extensions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36: 653 — 667

[7] Stoorvogal, A. A. et al.. A Reduced Order Observer Based Controller Design for H^∞ Optimization. IEEE Trans., 1994, AC-39: 355 — 358

附录

步骤 a) 到 d) 给出了求 $(\bar{X},Y)\in\mathscr{L}_D$ 的方法，下面利用 $(\bar{X},Y)$ 求控制器.

e) 求 P_{12},P_{22} 和 P 满足

$$P_{12}^{\mathrm{T}}P_{22}^{-1}P_{12}=\bar{X}-Y^{-1},\mathrm{rank}P_{22}=\mathrm{rank}(\bar{X}-Y^{-1}),$$

$$P:=\begin{pmatrix} X & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{pmatrix};$$

f) 对(4)，求

$$B:=\begin{bmatrix} T_1^{\mathrm{T}} & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{211} & 0 & 0 \\ B_{221} & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_c} \\ D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C:=\begin{pmatrix} C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & D_{21} \\ 0 & 0 & I_{n_c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} T_1^{\mathrm{T}} & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}.$$

求 B_L,B_R,C_L,C_R 使 $B=B_LB_R,C=C_LC_R$. 且 B_L,C_L 列满秩，B_R,C_R 行满秩. 最后求出 B_R^+,C_L^+.

g) 选择 $R>0$，满足 $\|L\|<1$ 的 L 以及任意的 Z 代入文[5](22)式，得 $G=\begin{pmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{pmatrix}$，从而得 $u(s)=D_c+C_c(sI-A)^{-1}B_c$. 结束.

A Linear-Matrix-Inequality Based Design Method of Reduced-Order Controllers for Singular H_∞ Control Problems

GUO Lei, XIN Xin and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210018, PRC)

Abstract: This paper considers reduced-order controllers for singular H_∞ control problem in which the generalized plant not only has infinite zeros, but also has finite zeros on imaginary axis. We obtain the following important result via the method of linear matrix inequality: If the singular H_∞ problem considered is solvable, then there must exist reduced order controllers. The result generalizes the previous results about reduced order controller for singular H_∞ problems. Finally we give feasible and explicit design steps for constructing the reduced-order controller.

Keywords: H_∞ control; robust control; matrix inequality; reduced-order controller

本文作者简介

郭 雷 1966年生.1988年,1991年于曲阜师范大学分别获学士和硕士学位.曾在青岛大学理工学院任教.现为东南大学自动化所博士研究生.目前主要研究方向是H_∞控制、鲁棒控制和非线性系统理论与应用.

忻 欣 见本刊1996年第1期第75页.

冯纯伯 见本刊1996年第1期第17页.

中国自动化学会第十二届青年学术年会(YAC'97)
征 文 通 知

为促进我国自动化领域及相关学科青年科技工作者的迅速成长,推动青年科技工作者的学术交流,拟定于1997年8月中旬在杭州召开中国自动化学会第十二届青年学术年会.本次会议由中国自动化学会主办,由浙江工业大学信息工程学院和浙江大学工业控制技术研究所联合承办,浙江省自动化学会协办.大会期间将邀请国内有关著名专家、学者做综述或专题报告;组织专题讨论;举办高新技术产品展示会.现将有关事宜通知如下:

一、征文范围

1) 线性与非线性系统控制; 2) 自适应控制和预测控制; 3) H_∞控制和鲁棒控制; 4) 智能控制、模糊控制; 5) 系统辨识与建模; 6) 故障诊断与容错控制; 7) 神经元网络及其应用; 8) 自动化仪表与过程控制; 9) 软件工程、并行处理; 10) 人工智能与专家系统; 11) 图象处理与模式识别; 12) 机器人学与机器人控制; 13) 大系统; 14) 电力系统及其自动化; 15) 电机驱动及运动控制; 16) 传感器与检测技术; 17) 离散事件动态系统; 18) 计算机集成制造系统; 19) 系统工程理论、方法及其应用; 20) 企业改革、发展战略与管理决策; 21) 工业工程与生产管理; 22) 其它.

二、征文要求

1) 论文应反映国内外先进水平或有一定的实用价值,未在国内外正式刊物或全国性学术会议上发表过;2) 论文全文一般不超过5000字; 3) 论文第一作者的年龄不超过40岁.

三、论文截稿时间:1997年3月1日

1997年4月15日前向作者发出论文录用通知;

1997年5月15日以前要求作者返回正式论文打印稿;

1997年7月1日以前发出会议通知.

四、投稿地址

杭州市(310014) 浙江工业大学信息工程学院 YAC'97组委会

联系电话:(0571)8320200,(0571)8058026 联系人:俞立,陈国定

五、有关说明

1) 投稿时请注明文章所属的研究方向(见上述征文范围);

2) 论文录用后收编入会议论文集,会议论文集由出版社正式出版.部分优秀稿件将在全国核心期刊刊出;

3) 请作者自留论文底稿,论文录用与否,一律不退稿件.