第13卷第6期 控制理论与应用 Vol. 13, No. 6
1996年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1996

关于不确定线性连续随机系统的协方差上下界研究*

王子栋 郭 治

(南京理工大学自动控制系·南京,210094)

摘要:在随机控制领域中,线性系统的鲁棒性质及性能指标常常以其稳态状态协方差矩阵的形式给出.本文研究在状态矩阵及噪声矩阵中均含有不确定性的线性连续随机系统的稳态状态协方差上下界确定问题,从而为基于协方差性能指标的控制与模型简化提供必要的理论分析基础.

关键词:不确定系统;系统分析;协方差特性

1 引 言

在随机控制问题中,线性系统的许多鲁棒性质及性能指标常常以系统稳态状态协方差的形式给出.八十年代形成并成熟起来的协方差控制理论[1,2]的主要思想是:首先根据不同的系统性能指标要求选择一合适的状态协方差,然后设计控制器,使闭环系统配置该指定值,并因此具有期望的系统性能.另一方面,同样起源于八十年代的基于协方差等价实现的模型简化方法[3,4]也引起理论及工程界的广泛关注,其主要思想是设计降阶模型,使之与满阶模型具有相同的稳态输出协方差,因而在协方差所表征的系统特性上与满阶模型相似.鉴于此,线性随机系统的协方差特性在系统鲁棒性分析、协方差控制及协方差等价实现理论中起着极为重要的作用.

在实际系统的建模过程中,不可避免地存在着建模误差,而这将直接影响系统的协方差特性,即不确定线性随机系统的稳态协方差也将发生一定变化.因此,确定受扰线性系统的协方差矩阵的上、下界不仅有利于系统鲁棒性分析,而且成为基于协方差的控制及模型简化的前提,从而亟具理论和应用价值.文献[5,6]研究了系统矩阵不确定时状态协方差的上、下界估计问题,而对于噪声矩阵不确定的情形则没有涉及.在工程实践(如机动目标跟踪)中,噪声矩阵发生扰动的情形是很常见的.因此,本文研究在状态矩阵及噪声矩阵中均含有不确定性的线性连续随机系统的状态协方差上、下界确定问题,利用代数 Riccati 方程方法,给出比文献[5,6]更为一般的结果.

2 问题的描述

考虑如下含结构参数扰动的线性连续时间随机系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (D + \Delta D)w(t). \tag{1}$$

其中矩阵 A 渐近稳定,即其特征值均具负实部. $w(t)$ 为单位强度的高斯白噪声信号. ΔA 及 ΔD 为表示结构扰动的实值矩阵函数,且属于如下给定集合[6]:

* 国家自然科学基金、高校博士学科点专项科研基金、国防科工委预研基金及南京理工大学科研发展基金资助课题.
本文于1995年3月7日收到.1995年10月20日收到修改稿.

$$\Omega = \{(\Delta A, \Delta D) : [\Delta A \ \Delta D] = MF[N_1 \ N_2], FF^{\mathrm{T}} \leqslant I\}.$$

这里 M, N_1, N_2 为已知适维定常矩阵，F 为未知但范数有界的矩阵函数，且假定 $(D+\Delta D)$，$(D+\Delta D)^{\mathrm{T}} > 0$

当 $A+\Delta A$ 保持稳定时，系统(1)的稳态状态协方差 $X = \lim\limits_{t\to\infty} E[x(t)x^{\mathrm{T}}(t)]$ 为如下 Lyapunov 方程的唯一正定解

$$(A + \Delta A)X + X(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + (D + \Delta D)(D + \Delta D)^{\mathrm{T}} = 0. \tag{2}$$

由(2)可知，协方差 X 将因 ΔA 及 ΔD 的变化而变化，则本文的目的在于寻找上界 $\overline{X}$ 及下界 $\tilde{X}$，使得对任意不确定矩阵对 $(\Delta A \ \Delta D) \in \Omega$，有 $\tilde{X} \leqslant X \leqslant \overline{X}$. 在本文中 $U < V < (U \leqslant V)$ 意味着 $U - V$ 负定(半负定).

3 主要结果及证明

定理 1 若存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 及正定阵 $\overline{X} > 0$，满足

$$\beta N_2 N_2^{\mathrm{T}} < I, \tag{3}$$

$$A\overline{X} + \overline{X}A^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}\overline{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\overline{X} + D[I + N_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2]D^{\mathrm{T}} + (\alpha + \beta^{-1})MM^{\mathrm{T}} = 0. \tag{4}$$

则有：

1) 对任意的不确定矩阵对 $(\Delta A \ \Delta D) \in \Omega$，系统矩阵 $A + \Delta A$ 仍保持渐近稳定；

2) 稳态协方差 X 存在且满足 $X \leqslant \overline{X}, \forall \ (\Delta A \ \Delta D) \in \Omega$.

证　1) 若存在 $\alpha > 0, \beta > 0$ 及 $\overline{X} > 0$ 使(3)(4)成立，令

$$P \triangleq \alpha^{1/2}MF - \alpha^{-1/2}\overline{X}N_1^{\mathrm{T}}, Q \triangleq DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1/2} - MF(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{1/2}.$$

则由 $FF^{\mathrm{T}} \leqslant I$ 可得：

$$\begin{aligned} 0 \leqslant PP^{\mathrm{T}} &= \alpha MFF^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}\overline{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\overline{X} - MFN_1\overline{X} - \overline{X}N_1^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \\ &\leqslant \alpha MM^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}\overline{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1 - [\Delta A\overline{X} + \overline{X}\Delta A^{\mathrm{T}}] \triangleq \Phi, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant QQ^{\mathrm{T}} &= DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}} - DN_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} - MFN_2D^{\mathrm{T}} \\ &\quad + MF(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \\ &\leqslant DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}} - [D\Delta D^{\mathrm{T}} + \Delta DD^{\mathrm{T}} + \Delta D\Delta D^{\mathrm{T}}] + \beta^{-1}MM^{\mathrm{T}} \\ &= DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I - N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}} - (D + \Delta D)(D + \Delta D)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} + \beta^{-1}MM^{\mathrm{T}} \triangleq \Sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

据(5)(6)两式，则(4)式可重写为

$$(A + \Delta A)\overline{X} + \overline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + (D + \Delta D)(D + \Delta D)^{\mathrm{T}} + \Phi + \Sigma = 0. \tag{7}$$

因 $(D+\Delta D)(D+\Delta D)^{\mathrm{T}} + \Phi + \Sigma > 0$，故由 Lyapunov 稳定性理论可知，$A + \Delta A$ 仍保持渐近稳定，从而系统(1)的稳态状态协方差 X 存在且满足(2)式.

2) 将(7)式减去(2)式可得

$$(A + \Delta A)(\overline{X} - X) + (\overline{X} - X)(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + \Phi + \Sigma = 0.$$

因 $A + \Delta A$ 稳定，则上式等价于

$$\overline{X} - X = \int_0^\infty \exp[(A + \Delta A)t](\Phi + \Sigma)\exp[(A + \Delta A)^{\mathrm{T}}t]\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

即 $X \leqslant \overline{X}$，从而定理 1 得证.

说明 1　由定理 1 知，当代数 Riccati 方程(4)存在正定解时，鲁棒稳定性要求就自动融

入了问题中，且该正定解还给出了实际协方差的上界. 注意到代数 Riccati 方程(4)的形式在 H_∞标准控制理论中经常出现，因而可用较成熟的方法[7]求解.

为有利于实际应用，下面对代数 Riccati 方程(4)正定解的存在条件及性质做一些必要的讨论. 类似于文献[5]中推论 2.1 的推导，可得如下引理.

引理 1 设 A 稳定，且 $Y \triangleq DD^{\mathrm{T}}+DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I-N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}}+(\alpha+\beta^{-1})MM^{\mathrm{T}}$，则如下叙述等价：

1) Hamilton 矩阵 $H=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & \alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1 \\ -Y & A \end{bmatrix}$无纯虚特征根.

2) $\|C(sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}B\|_\infty<1$，其中 $\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup\limits_{\omega}\lambda_{\max}^{1/2}[G(j\omega)G^{\mathrm{T}}(j\omega)]$，$BB^{\mathrm{T}}=\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1$，$C^{\mathrm{T}}C=Y$.

3) 存在唯一解 $\bar{X}=\bar{X}_s^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 满足(4)且 $A+BB^{\mathrm{T}}\bar{X}_s$ 稳定.

进一步，对任意给定的 α,β，上述 $\bar{X}_s$ 是所有对称正定解中最小的，即若有解 $\bar{X}\geqslant 0$ 满足(4)，则必有 $\bar{X}_s\leqslant\bar{X}$.

说明 2 由引理 1，可选择适当的 $\alpha>,\beta>0$，使结论 1)或 2)成立，再由 H_∞控制理论中对形如(4)的代数 Riccati 方程的求解方法[7]，得到方程(4)的最小半正定解或正定解.

下面的推论则进一步给出了代数 Riccati 方程(4)有正定解的必要条件.

推论 1 若方程(4)有正定解 $\bar{X}>0$，则

$$A(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{-1}A^{\mathrm{T}}-DD^{\mathrm{T}}-DN_2^{\mathrm{T}}(\beta^{-1}I-N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}}-(\alpha+\beta^{-1})MM^{\mathrm{T}}>0. \tag{8}$$

证 由式

$$[A(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{-1/2}+\bar{X}(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{1/2}][A(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{1/2}+\bar{X}(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{-1/2}]^{\mathrm{T}}$$
$$=A\bar{X}+\bar{X}A^{\mathrm{T}}+\alpha^{-1}\bar{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\bar{X}+A(\alpha^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1)^{-1}A^{\mathrm{T}}>0$$

可直接证明推论 1.

下面继续研究受扰系统的协方差下界确定问题. 为此，有如下结果.

定理 2 在定理 1 的假设下，若有常数 $\varepsilon>0,\gamma>0$ 及定阵 $\tilde{X}>0$ 满足如下代数 Riccati 方程

$$A\tilde{X}+\tilde{X}A^{\mathrm{T}}+DD^{\mathrm{T}}-\varepsilon^{-1}\tilde{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\tilde{X}-DN_2^{\mathrm{T}}(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}}-(\varepsilon+\gamma^{-1})MM^{\mathrm{T}}=0. \tag{9}$$

证 若定理 2 条件成立，再令

$$R \triangleq \varepsilon^{1/2}MF+\varepsilon^{-1/2}\tilde{X}N_1^{\mathrm{T}},$$
$$S \triangleq DN_2^{\mathrm{T}}(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1/2}+MF(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})^{1/2}.$$

则由 $FF^{\mathrm{T}}\leqslant I$ 可得：

$$\begin{aligned}0\leqslant RR^{\mathrm{T}}&=\varepsilon MFF^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\tilde{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\tilde{X}+MFN_1\tilde{X}+\tilde{X}N_1^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\\&\leqslant\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\tilde{X}N_1^{\mathrm{T}}N_1\tilde{X}+\Delta A\tilde{X}+\tilde{X}\Delta A^{\mathrm{T}}\triangleq\Pi,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}0\leqslant SS^{\mathrm{T}}&=DN_2^{\mathrm{T}}(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}}+DN_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+MFN_2D^{\mathrm{T}}\\&\quad+MF(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\\&\leqslant DN_2^{\mathrm{T}}(\gamma^{-1}I+N_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2D^{\mathrm{T}}+[(D+\Delta D)(D+\Delta D)^{\mathrm{T}}-DD^{\mathrm{T}}]\\&\quad+\gamma^{-1}MM^{\mathrm{T}}\triangleq Z.\end{aligned} \tag{11}$$

由(10)(11)两式知,式(9)等价于

$$(A+\Delta A)\tilde{X}+\tilde{X}(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}+(D+\Delta D)(D+\Delta D)^{\mathrm{T}}-\Pi-Z=0. \tag{12}$$

将(2)式减去(12)式可得:

$$(A+\Delta A)(X-\tilde{X})+(X-\tilde{X})(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}+\Pi+Z=0. \tag{13}$$

则因 $A+\Delta A$ 的稳定性,(13)式等价于

$$X-\tilde{X}=\int_0^{\infty}\exp[(A+\Delta A)t](\Pi+Z)\exp[(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}t]\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

即 $X\geqslant\tilde{X}$,从而定理 2 得证.

说明 3　定理 2 给出了受扰系统的状态协方差的下界估计式. 注意到式(9)实际上为一标准的代数 Riccati 方程,因而同样有成熟的求解方法.

说明 4　由定理 1,2 可知,受扰系统的协方差上、下界的确定依赖于常参数 $\alpha,\beta,\varepsilon,\gamma$ 的选取,这说明其中蕴含有较大的自由度. 如何利用其中的自由度达到“优化”的目的,即使得估计误差的最小二乘“距离”最小,以及如何得到解法的有限步收敛证明,将是进一步研究的课题.

说明 5　定理 1,2 的主要结果已应用于含结构参数扰动的车辆运输系统的模型简化中. 简化模型在协方差参数所表征的系统性能方面较好地匹配高阶模型,从而为一类不确定系统的鲁棒降阶简化提供了新途径.

4　数值算例

考虑含结构参数扰动的连续系统(1),其中

$$A=\begin{bmatrix}-6.5000 & 1 & 0\\ 0 & -4.8333 & 0.6667\\ 0 & 0.3333 & -5.1667\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0.0148 & 0.2892 & 0.7524\\ -0.2132 & -0.9320 & 0.2294\\ 1.4303 & -0.1419 & 0.0264\end{bmatrix},$$

$$\Delta A=MFN_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\sin\delta & 0 & 0\\ 0 & 0.1\sin\delta & 0\\ 0 & 0 & 0.1\sin\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\Delta D=MFN_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\sin\delta & 0 & 0\\ 0 & 0.1\sin\delta & 0\\ 0 & 0 & 0.1\sin\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.01&0&0\\0&0.01&0\\0&0&0.01\end{bmatrix}.$$

由上节提供的方法,选取

$$\alpha=0.26;\quad \beta=0.35,\quad \varepsilon=0.22,\quad \gamma=0.51.$$

可求得稳态协方差上、下界分别为

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}0.0620 & 0.0001 & 0.0003\\ 0.0001 & 0.01214 & 0.0008\\ 0.0003 & 0.0008 & 0.2301\end{bmatrix},\quad \tilde{X}=\begin{bmatrix}0.0384 & 0.0001 & -0.0003\\ 0.0001 & 0.0794 & -0.0002\\ -0.0003 & -0.0002 & 0.1562\end{bmatrix}.$$

5　结　　论

本文研究了含参数不确定性的线性连续随机系统的的稳态状态协方差的上、下界确定问题,其中不确定性不仅包含在系统矩阵中,而且包含于噪声矩阵中,从而推广了文献[5,6]的工作. 文中结果已成功地应用于车载火控系统高阶模型在各种噪声(如路面不平、瞄准等)

干扰下的模型降阶简化中,进一步的研究将主要集中于算法的优化及收敛性证明.

参 考 文 献

[1] Hotz,A. F. and Skelton,R. E.. Covariance Control Theory. Int. J. Control,1987,46(1):13—32

[2] Skelton,R. E. and Iwasaki,T.. Liapunov and Covariance Controllers. Int. J. Control,1993,57(3):519—536

[3] Skelton,R. E. and Anderson,B. D. O.. q-Markov Covariance Equivalent Realizations. Int. J. Control,1986,44(5):1477—1490

[4] Skelton,R. E. and Anderson,B. D. O.. Weighted q-Markov Covariance Equivalent Realizations. Int. J. Control,1989,49(5):1755—1771

[5] Xu,-J. H.,Skelton,R. E. and Zhu,G.. Upper and Lower Covariance Bounds for Perturbed Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr.,1990,AC-35(8):944—948

[6] Auba,T. and Funahashi,Y.. Upper and Lower Bounds of Gramian for a Class of Perturbed Linear Systems. IEEE Trans. Automat,Contr.,1992,AC-37(10):1659—1661

[7] Gohberg,I.,Lancaster,P. and Rodman,L.. On Hermitian Solutions of the Symmetric Algebraic Riccati Equations. SIAM J. Contr. Optim.,1986,24(6):1323—1334

On Upper and Lower Covariance Bounds for Uncertain Linear Continuous-Time Stochastic Systems

WANG Zidong and GUO Zhi

(Department of Automatic Control,Nanjing Unversity of Science and Technology · Nanjing,210094,PRC)

Abstract: In the field of stochastic control,many robustness properties and performance requirements of linear systems are given explicitly in terms of the state covariance matrix. In this paper,the problem of determining upper and lower state-covariance bounds is studied for linear continuous-time stochastic systems with uncertainties in both the state matrix and the noise matrix. An effective algebraic Riccati equation approach is exploited to obtain the upper and lower covariance bounds. A numerical example is provided to demonstrate the directness and applicability of the proposed synthesis method. The main results of the present paper offer the basis of theoretical synthesis for the covariance-based control and model reduction.

Key words: uncertain systems; system synthesis; covariance characteristics

本文作者简介

王子栋 1966年生. 1986年于苏州大学数学系获学士学位,1988年于中国纺织大学应用数学专业获硕士学位,1994年于南京理工大学自动控制系获博士学位,同年晋升为副教授,1996年获德国洪堡博士后研究基金,主要研究方向为随机控制系统的建模、简化与控制,信息融合理论与应用等.

郭 治 见本刊1996年第2期第174页.