第 14 卷第 1 期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 1
1997 年 2 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Feb., 1997

不确定变时滞线性系统的镇定条件

曹登庆

(西南交通大学应用力学研究所·成都，610031)

摘要：研究含时变非结构不确定性的变时滞线性系统的镇定控制器设计问题. 基于代数 Riccati 方程的处理方法，提出了使其闭环系统渐近稳定的无记忆反馈控制器的设计方案. 此外，还导出了两组直接由系统参数表示的鲁棒镇定条件. 文末给出了用以阐明所得结果的数值算例，并与已有的结果进行了比较.

关键词：不确定性；变时滞；鲁棒镇定；Riccati 方程；Lyapunov 泛函

1　引　　言

不确定动态时滞系统的控制与镇定近年来引起了专家学者们的极大兴趣. 以不确定动力系统的镇定性研究和时滞系统的无记忆反馈设计为基础，文献[1～8]等对时滞系统的鲁棒镇定问题进行了研究，但各有其局限性. 首先，不确定性的结构受到限制，要求满足所谓"匹配条件"，如[1～4]等；其次，要求对非 Hurwitz 稳定的名义系统进行预补偿，并要求不确定性的界小于由 Lyapunov 矩阵方程所确定的阀值(这一要求可能导致高增益控制)，如[5,6]等；再次，所设计的镇定控制器依赖于代数 Riccati 方程的可解性，为此需要进行大量的计算以寻求适当的 ε 值，如文[7,8]等. 此外，以上研究除[8]外大都没有考虑变时滞问题.

本文研究不确定变时滞线性系统的镇定问题，应用 Lyapunov 泛函提出了使其闭环系统渐近稳定的无记忆线性反馈控制律. 不确定性被划分为"匹配"和"不匹配"两部分，且要求不确定性的不匹配部分的界满足与 Riccati 方程的解矩阵有关的显式准则，而不是隐含条件，在很大程度上克服了已有工作中的局限性.

2　系统描述与假设

考虑由下述微分差分方程描述的不确定变时滞线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A(r(t))]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(s(t))]x(t-\tau(t)) + Bu(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad -h \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统在时刻 t 的状态矢量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制矢量，A, A_1 和 B 是给定的具有适当维数的常数矩阵；$\varphi(t)$ 是一个连续的矢量初值函数；$\Delta A(r(t))$ 和 $\Delta A_1(s(t))$ 是不确定的连续函数矩阵. $(r(t), s(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$ 是不确定参数矢量，Ω 是 $\mathbb{R}^p$ 中的紧子集，且 $r(t)$ 和 $s(t)$ 是 L- 可测的. $\tau(t) \geqslant 0$ 是一个有界函数，且存在常数 h 和 k 使对任意 $t \geqslant t_0$ 有

$$0 \leqslant \tau(t) < h < +\infty, \quad \dot{\tau}(t) \leqslant k < 1. \tag{2}$$

选取具有适当维数的矩阵 $D(r), E, G(s)$ 和 $\Delta\widetilde{A}(r), \widetilde{A}_1, \Delta\widetilde{A}_1(s)$，使对任意 $(r,s) \in \Omega$ 有

$$\begin{cases} \Delta A(r) = BD(r) + \Delta\widetilde{A}(r), \\ A_1 = BE + \widetilde{A}_1, \\ \Delta A_1(s) = BG(s) + \Delta\widetilde{A}_1(s). \end{cases} \tag{3}$$

显然，矩阵 $D(r), E, G(s)$ 和 $\Delta\widetilde{A}(r), \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_1(s)$ 总存在，且分解式(3) 不是唯一的.

本文于 1995 年 1 月 9 日收到. 1996 年 3 月 22 日收到修改稿.

假定不确定系统(1)满足如下两个条件:

条件 A 设系统(1)中的不确定性有界,且当其按(3)式分解时,存在正常数 a,b,α,β 使对任意 $(r,s)\in\Omega$ 有

$$\begin{cases}\|D(r)\|^2\leqslant a,\quad \|E\|^2+\|G(s)\|^2\leqslant b,\\ \|\Delta\widetilde{A}(r)\|\leqslant\alpha,\quad \|\Delta\widetilde{A}_1(s)\|\leqslant\beta.\end{cases}\tag{4}$$

条件 B 设系统(1)中 (A,B) 是可镇定的,即对任意 $\gamma>1$ 和 $\eta>0$,Riccati 矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-\gamma PBB^{\mathrm{T}}P+(3+2\eta)I=0\tag{5}$$

存在唯一的正定矩阵解 P. (5)式中 I 是单位矩阵.

3 主要定理

定理 1 如果条件 A 和 B 成立,且对任意 $(r,s)\in\Omega$ 有

$$\alpha\|P\|+\frac{2-k}{2(1-k)}[\beta\|P\|+\|P\widetilde{A}_1\|]<\eta.\tag{6}$$

则无记忆线性反馈控制器

$$u(t)=-\frac{1}{2}(a+\frac{b}{1-k}+\gamma)B^{\mathrm{T}}Px(t)\tag{6}$$

使系统(1)的闭环系统渐近稳定.

证 在线性反馈控制器(7)的作用下,不确定系统(1)的闭环系统成为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&(A+\Delta(r))x(t)+[A_1+\Delta A_1(s))x_1(t-\tau)]\\&-\frac{1}{2}(a+\frac{b}{1-k}+\gamma)BB^{\mathrm{T}}Px(t).\end{aligned}\tag{8}$$

取泛函

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+(2+\xi)\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)\mathrm{d}\theta.\tag{9}$$

式中 $\xi=\beta\|P\|+\|P\widetilde{A}_1\|$. 沿系统(8)的解微分 $V(x_t)$ 得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)=&x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P+PA-(a+\frac{b}{1-k}+\gamma)PBB^{\mathrm{T}}P]x(t)\\&+2x^{\mathrm{T}}(t)P[\Delta A(r)x(t)+(A_1+\Delta A_1(s))x(t-\tau)]\\&+(2+\xi)[x^{\mathrm{T}}(t)x(t)-(1-\dot{\tau}(t))x^{\mathrm{T}}(t-\tau)x(t-\tau)].\end{aligned}$$

应用 Riccati 矩阵方程(5),并注意到(3)式则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)=&-x^{\mathrm{T}}(t)[(2\eta+1-\xi)I+(a+\frac{b}{1-k})PBB^{\mathrm{T}}P]x(t)\\&+2x^{\mathrm{T}}(t)PB[D(r)x(t)+(E+G(s))x(t-\tau)]\\&+2x^{\mathrm{T}}(t)P[\Delta\widetilde{A}(r)x(t)+(\widetilde{A}_1+\Delta\widetilde{A}_1(s))x(t-\tau)]\\&-(2+\xi)(1-\dot{\tau}(t))x^{\mathrm{T}}(t-\tau)x(t-\tau).\end{aligned}\tag{10}$$

由于对任意恰当矩阵 E 和 F 及任意正常数 $c>0$ 有 $E^{\mathrm{T}}F+F^{\mathrm{T}}E\leqslant\frac{1}{c}E^{\mathrm{T}}E+cF^{\mathrm{T}}F$, 因此

$$\begin{cases}2x^{\mathrm{T}}(t)PBD(r)x(t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)PBD(r)D^{\mathrm{T}}(r)B^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)x(t),\\ 2x^{\mathrm{T}}(t)PBEx(t-\tau)\leqslant\frac{1}{1-k}x^{\mathrm{T}}(t)PBEE^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Px(t)+(1-k)x^{\mathrm{T}}(t-\tau)x(t-\tau),\\ 2x^{\mathrm{T}}(t)PBG(s)x(t-\tau)\leqslant\frac{1}{1-k}x^{\mathrm{T}}(t)PBG(s)G^{\mathrm{T}}(s)B^{\mathrm{T}}Px(t)\\ \qquad+(1-k)x^{\mathrm{T}}(t-\tau)x(t-\tau),\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta\tilde{A}(r)x(t) \leqslant 2\alpha \| P \| \| x(t) \|^2, \\ 2x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_1 x(t-\tau) \leqslant 2 \| P\tilde{A}_1 \| \| x(t) \| \| x(t-\tau) \| \\ \qquad \leqslant \| P\tilde{A}_1 \| [\frac{1}{1-k} \| x(t) \|^2 + (1-k) \| x(t-\tau) \|^2], \\ 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta\tilde{A}_1(s)x(t-\tau) \leqslant 2\beta \| P \| \| x(t) \| \| x(t-\tau) \| \\ \qquad \leqslant \beta \| P \| [\frac{1}{1-k} \| x(t) \|^2 + (1-k) \| x(t-\tau) \|^2]. \end{cases} \tag{11}$$

将不等式(11)代入(10)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leqslant & -[2\eta - \xi - \frac{1}{1-k}(\beta \| P \| + \| P\tilde{A}_1 \|) - 2\alpha \| P \|] \| x(t) \|^2 \\ & - x^{\mathrm{T}}(t)PB[(a + \frac{b}{1-k})I - D(r)D^{\mathrm{T}}(r) - \frac{1}{1-k}(EE^{\mathrm{T}} + G(s)G^{\mathrm{T}}(s))]B^{\mathrm{T}}Px(t) \\ & - [(2+\xi)(1-\dot{\tau}(t)) - (2 + \beta \| P \| + \| P\tilde{A}_1 \|)(1-k)] \| x(t-\tau) \|^2. \end{aligned}$$

注意到(2)式、条件 A 及 $\xi = \beta \| P \| + \| P\tilde{A}_1 \|$，则

$$\dot{V}(x_t) \leqslant -2[\eta - \frac{2-k}{2(1-k)}(\beta \| P \| + \| P\tilde{A}_1 \|) - \alpha \| P \|] \| x(t) \|^2.$$

根据(6)式即知，对任意 $(r,s) \in \Omega$，$\dot{V}(x_t)$ 负定. 应用泛函数微分方程的渐近稳定性定理(参见文献[9]定理 2.1)可知定理 1 的结论成立.　　证毕.

推论 1　如果条件 A 和 B 成立，且不确定性满足匹配条件(即(3)式中 $\Delta\tilde{A}(r) = \Delta\tilde{A}_1(s) = 0$)，则当

$$\| P\tilde{A}_1 \| < \frac{2(1-k)}{2-k}\eta \tag{12}$$

时，不确定变时滞系统(1)可由无记忆线性反馈控制器(7)所镇定.

定理 1 给出的镇定条件依赖于 Riccati 矩阵方程(5)的解 P. 为便于实际应用，这里给出两组仅依赖于系统参数的镇定条件.

定理 2　如果条件 A 成立，且存在矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使

$$2\mu(A + BF) + 2\alpha + \frac{2-k}{1-k}(\beta + \| \tilde{A}_1 \|) + 3 < 0. \tag{13}$$

则不确定系统(1)在无记忆线性反馈控制器

$$u(t) = Fx(t) - \frac{1}{2}(a + \frac{b}{1-k})B^{\mathrm{T}}x(t) \tag{14}$$

的作用下渐近稳定.

定理 3　如果存在矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使对任意的 $(r,s) \in \Omega$ 有

$$\mu(A + BF) + \| \Delta A(r) \| + \frac{2-k}{2(1-k)}(\| A_1 \| + \| \Delta A_1(s) \|) < 0. \tag{15}$$

则不确定系统(1)在无记忆线性反馈控制器 $u(t) = Fx(t)$ 的作用下渐近稳定.

应用类似于定理 1 的证明方法，容易证明定理 2 和定理 3 的结论.

4　数值算例和结语

例 1　考虑不确定变时滞线性系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 \\ 2 & r_2 - 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} s_1 & s_1 + 1 \\ s_2 - 0.5 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \tag{16}$$

式中 $\tau(t) = 0.5(1 + \cos t)$；$r_i, s_i (i = 1,2)$ 是不确定参数，且

$$\|r_1\| \leqslant 2, \quad \|r_2\| \leqslant 0.4, \quad |s_1| \leqslant 2, \quad |s_2| \leqslant 0.3. \tag{17}$$

与系统(1)比较有 $h = 1, k = 0.5$,且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(r) = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_1(s) = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

按(3)式进行分解,取 $D(r) = [r_1 \quad r_1], E = [0 \quad 1], G(s) = [s_1 \quad s_1]$,则有

$$\Delta\widetilde{A}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}; \quad \widetilde{A}_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

由(17)和(18)式,容易求得

$$a = 8, \quad b = 9, \quad \alpha = 0.4, \quad \beta = 0.3.$$

在 Riccati 方程(5)中取 $\gamma = 10, \eta = 6$ 求得正定矩阵解 P,通过简单计算可得 $\|P\| = 3.3635$, $\|P\widetilde{A}_1\| = 1.6500$,从而

$$\alpha\|P\| + \frac{2-k}{2(1-k)}[\beta\|P\| + \|P\widetilde{A}_1\|] = 5.334 < \eta = 6.$$

根据定理 1,不确定时滞系统(16)在无记忆线性反馈控制器 $u(t) = -[23.30 \quad 7.88]x(t)$ 的作用下渐近稳定.

对于不确定系统(16),即使考虑常时滞(τ是常数)问题,用文[5,6]的方法也无法设计出鲁棒镇定控制器.显然,系统(16)中的不确定性部分不满足匹配条件,因此也不能用文[1～4]的方法来设计系统的鲁棒镇定控制器.由此可以看出将不确定性按(3)式分解为"匹配"和"不匹配"两部分来考虑有很大的优越性.总之,与现有结果比较,这里提出的控制律有以下几个特点:

1)不确定性被划分为"匹配"和"不匹配"两部分,因而对非结构不确定性也适用;

2)由于采用了 Riccati 矩阵方程的处理方法,因而不必对非 Hurwitz 稳定的名义系统进行预补偿;

3)时滞可以是随时间变化的;

4)仅要求"不匹配"不确定性部分的界满足与 Riccati 方程的解矩阵有关的显式准则,计算简单,且不必考虑 Riccati 方程的可解性.

参 考 文 献

1 Thowsen, A.. Uniform ultimate boundedness of the solutions of uncertain dynamic delayed systems with state-dependent and memoryless feedback control. Int. J. Control, 1983, 37: 1135－1143

2 Yu, Y.. On stabilizing uncertain linear systems. J. Opt. Theory and Appl., 1983, 41: 503－507

3 Chres, E., Gutman, S. and Palmor, Z. J.. Stabilization of uncertain dynamic systmes including state delay. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34: 1199－1203

4 俞立.不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计.控制理论与应用,1991,8:68－73

5 俞立.不确定动态时滞系统的稳定化鲁棒控制.控制与决策,1993,8:307－310

6 曹登庆.不确定线性时滞系统的镇定.控制与决策,1995,10:153－157

7 Shen, J. C., Chen, R. S. and Kung, F. C.. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36: 638－640

8 Phoojaruenchanachai, S. and Furuta, K.. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state

delays. IEEE Trans. Automat. Contr, 1992, AC-37: 1022—1026

9 Hale, J.. Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977, 105—108

Stabilizability Conditions for Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delay

CAO Dengqing

(Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University · Chengdu, 610031, PRC)

Abstract: This paper is concerned with the problem of designing stabilization controllers for uncertain linear systems with time-varying delay. The uncertainty under consideration is time-varying and unstructured. The algebraic Riccati equation approach is developed to propose a memoryless linear stabilizability controller which renders the closed-loop system asymptotically stable. Furthermore, two sets of robust stabilizability conditions, which are expressed directly in terms of plant parameters, are derived. Finally, an numerical example is given to demonstrate the results obtained and to compare them with the existing ones.

Key word: uncertainty; time-varying delay; robust stabilization; Riccati equation; Lyapunov functional

曹登庆　1958年生. 1993年在西南交通大学获工学博士学位. 现为西南交通大学应用力学研究所副教授. 感兴趣的研究方向主要有不确定系统的稳定性与控制、大系统的分散鲁棒控制等.

(上接第79页)

Title	1997	Place	Deadline	Further Information
IFAC/(IFORS) Symposium(11th) System Identification-SYSID'97	July 8-11	Fukuoka Japan		SYSID'97 Secretriat: Mrs. Y. Hayashi Fukuoka Institute of Technology 3-30-1 Wajiro-higashi. Higashi-ku Fukuoka 811-02, Japan FAX +81/92-606 1342 e-mail: y-hayashi@dw. ee. fit. ac. jp
IFAC Symposium(4th) Advances in Control Education ACE 97	July 14-16	Istanbul Turkey	15 Oct. 1996	Prof. A. Talha Dinibütün Istanbul Technical Univ. , Mech. Engg. Faculty Gümüssuyu 80191, Istanbul, Turkey FAX +90/212-245 0795 e-mail: mkdnib@tritu. bitnet
IFAC Workshop Intelligent Manufacturing Systems	July 21-23	Seoul Korea	30 Nov. 1996	Prof. Hyung Suck Cho Dept. of Mechanical Engineering Korea Advanced Inst. of Science & Technology 373-1. Kusong-dong, Yusung-gu Taejon 305-701, Korea FAX +82/42 869 3210 e-mail: hscho@lca. kaist. ac. kr

(下转第95页)