

基于小波变换估计频域模型误差界

徐长江 宋文忠

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 讨论鲁棒辨识问题, 基于离散小波变换, 提出分段频带逼近, 估计频域模型误差界(幅值)。首先介绍离散小波变换, 然后给出分段频带逼近算法, 仿真结果验证所提方法。

关键词: 鲁棒辨识; 模型误差; 离散小波变换; 分段频带逼近

1 引言

针对鲁棒控制设计的需要, 鲁棒辨识应运而生。鲁棒辨识的任务是: 根据有限观测的输入输出数据 1) 估计标称模型参数, 2) 估计频域模型误差界(幅值)。标称模型参数可借用经典辨识方法估计, 而频域模型误差界的估计是鲁棒辨识的难点, 引起许多专家学者的关注。

文献[1~4]基于噪声在时域或频域内有界的假定, 估计模型误差界, 所得结果主要存在以下两点不足: 1) 由于基于噪声在频域或时域有界模型, 即考虑最坏但不太可能出现的情况, 必将使得估计结果过于保守; 2) [1, 2]提出的 H_∞ 辨识, 所得模型阶次过高, 至少与原始数据同一数量级。而[4]基于局限性较大的正交基展开模型。文献[5]从随机嵌入的角度, 基于模型误差的先验分布, 求得概率意义下的频域误差界, 其突出优点是估计结果不致于过分保守, 但如何选择合适的先验分布是该方法的主要困难。文[6]基于噪声的随机模型, 应用文[7]提出的经验传递函数估计(ETFE), 亦给出概率意义下的频域误差界, 由于[7]提出的 ETFE 的方差与信噪比有关, 因此文[6]的结果仍将过于保守。

文献[8]应用函数逼近论, 在频域内用有理函数逼近模型误差。在无噪声时, 通过提高有理函数的阶次能获得较精确估计, 然而, 在有噪声时, 提高有理函数的阶次即增加被估参数, 必将增加参数估计误差, 从而影响估计效果。

本文利用小波分频性能, 基于离散小波变换, 提出分段频带逼近法, 估计频域模型误差界(幅值)。主要思路是: 输入输出信号经小波变换, 使得相邻频带的信息被分解开来, 由于在各频带内模型误差的频域特性变化不大, 可用低阶模型逼近, 利用相应频带内的输入输出信息, 估计各频带内逼近模型参数, 然后应用小波综合滤波器, 将各频带的逼近模型组合, 即得频域模型误差幅值估计。

2 离散小波变换

离散小波变换的定义有两种形式^[9], 一种表示信号在时域的多分辨率分解^[10], 另一种表示信号在频域内分解^[11]。下面引进频域内分解定义。

考虑如图1所示的2-频完全重构系统^[12]。其中 $F(z)$, $P(z)$ 是高通滤波器, $H(z)$, $Q(z)$ 是低通滤波器。 $F(z)$, $H(z)$ 称为分解滤波器, 将信号 $x(n)$ 分解成两频带信号 $x_k(n)$, $P(z)$, $Q(z)$ 称为综合滤波器, 将分解信号 $x_k(n)$ 重构成原信号 $x(n)$ 。 $F(z)$, $Q(z)$ 的选取依赖于 $F(z)$, $H(z)$, 即满足

$$F(z)P(z) + H(z)Q(z) = 1. \quad (1)$$

根据(1)式有

$$F(z^n)P(z^n) + H(z^n)Q(z^n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

取 $n = 2^{k-1} (k = 1, \dots, K)$, 利用(2)式可依次将低频信号进一步分解, 如图 2 ($K = 3$) 所示. 分解信号 $\{w_k(n), k = 1, \dots, K, v_K(n)\}$ 即是信号 $x(n)$ 的 (K -频

程) 离散小波变换 DWT. $w_k(n), k = 1, \dots, K$ 称为小波系数, $v_k(n)$ 是低频信号.

若记

$$\begin{aligned} H_k(z) &= H(z^{2^{k-1}}) \cdots H(z^2)H(z), \quad F_k(z) = F(z^{2^{k-1}})H_{k-1}(z), \quad H_0(z) = 1, \\ Q_k(z) &= Q(z^{2^{k-1}}) \cdots Q(z^2)Q(z), \quad P_k(z) = P(z^{2^{k-1}})Q_{k-1}(z), \quad Q_0(z) = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{则} \quad w_k(n) = F_k(z)x(n), \quad v_k(n) = H_k(z)x(n). \quad (4)$$

利用(1)、(2)有

$$F_1(z)P_1(z) + \cdots + F_K(z)P_K(z) + H_K(z)Q_K(z) = 1. \quad (5)$$

分解滤波器 $F_k(z), k = 1, \dots, K$,

$H_K(z)$ 是一族相邻频带(倍频程)滤波器, 这说明小波具有分频性能, 即信号经小波变换, 相邻频带(倍频程)的局部信息被分解开来, 小波分频能力取决于分解滤波器 $F(z), H(z)$ 的设计. 关于小波分解滤波器 $F(z), H(z)$ 的设计, 可参考文献[12~15], 这里不作深入讨论.

3 频域模型误差分频逼近

假定所考虑的真实对象是用下式描述的单输入单输出的线性时不变系统

$$y(t) = G(z)u(t) + v(t). \quad (6)$$

其中 $u(t), y(t)$ 分别是系统的输入输出, $v(t)$ 是输出端的噪声. $u(t)$ 是充分激励的拟平稳信号, $v(t)$ 是零均值的平稳随机过程, 且 $u(t), v(t)$ 相互独立.

系统的标称模型选用

$$G(\theta, z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}}. \quad (7)$$

其中 $\theta = [a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n]$ 是模型的参数, 应用经典的辨识方法, 能求出参数的估计值 $\hat{\theta}$, 以及模型阶次 m, n . 从而模型误差为

$$E(z) = G(z) - G(\hat{\theta}, z). \quad (8)$$

记 $e(t)$ 为输出误差的观测值, 即

$$e(t) = y(t) - G(\hat{\theta}, z)u(t), \quad (9)$$

那么

$$e(t) = E(z)u(t) + v(t). \quad (10)$$

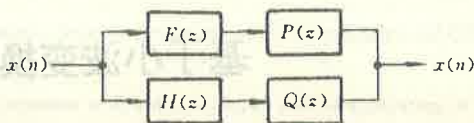


图 1 2-频带完全重构系统

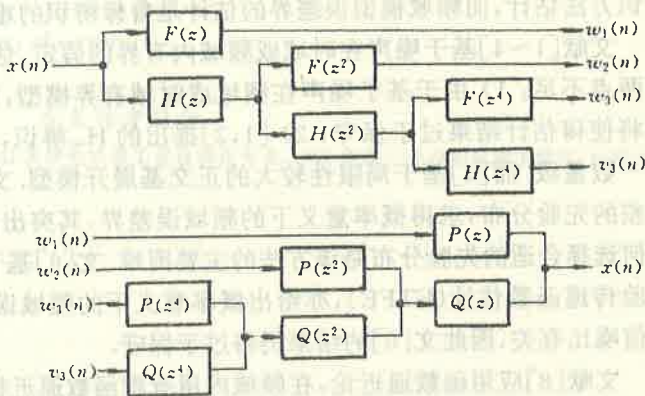


图 2 离散小波变换和重构流程图 ($K=3$)

记 $u(t), e(t), v(t)$ 的离散小波变换分别为

$$wu = \{wu_k(t), k = 1, \dots, K, vu_K(t)\},$$

$$we = \{we_k(t), k = 1, \dots, K, ve_K(t)\},$$

$$wv = \{wv_k(t), k = 1, \dots, K, vv_K(t)\}.$$

利用小波变换(4)式有(如图3所示)

$$we_k(t) = E(z)wu_k(t) + wv_k(t), \quad k = 1, \dots, K,$$

$$ve_K(t) = E(z)vu_K(t) + vv_K(t). \quad (11)$$

即 $we_k(t) = E(z)F_k(z)u(t) + wv_k(t), \quad k = 1, \dots, K,$

$$ve_K(t) = E(z)H_K(z)u(t) + vv_K(t). \quad (12)$$

根据小波的分频特性,可知

$$F_k(z)E(z), k = 1, \dots, K,$$

$H_K(z)E(z)$ 仅反映模型误差各相邻频带的频域特性,鉴于 $E(e^{j\omega})$ 在各频带内变化不大,故在各频带内可用低阶 FIR 模型逼近

$$E_k(z)$$

$$= c_{k0} + c_{k1}z^{-1} + \dots + c_{kl}z^{-l},$$

$$k = 1, \dots, K + 1. \quad (13)$$

频带宽度越窄, l 可选得越小,通

常 $l = 2$ 即可.

逼近模型参数 $c_k = [c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{kl}]$ 可根据相应频带的输入输出信息即小波变换 wu, we , 应用最小二乘法估计. 从而求得各频带内的最优逼近模型 $E_k(z)$. 根据图3结构,利用综合滤波器 $P_k(z), Q_K(z)$, 可将逼近模型 $E_k(z)$ 合成

$$E^*(z) = \sum E_k(z)F_k(z)P_k + E_{K+1}(z)H_K(z)Q_K(z). \quad (14)$$

则 $E^*(e^{j\omega})$ 即是频域模型误差估计.

在选定逼近模型阶次以及数据容量充足时,估计精度取决于各频带宽度,在幅度变化较大的频域内,频带越窄精度越高.

算法 1) 选取标称模型(7),且估计参数 θ ;

2) 利用(9)计算输出误差 $e(t)$;

3) 设计分解滤波器 $F(z), H(z)$, 综合滤波器 $P(z), Q(z)$, 计算 $u(t), e(t)$ 的离散小波变换;

4) 选定逼近模型(13),估计参数 $c_k, k = 1, \dots, K$;

5) 利用(14)计算 $|E^*(e^{j\omega})|$.

4 仿真例子

例1 考虑真实对象

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.2z^{-1} + 0.0101z^{-2})}. \quad (15)$$

输入 $u(t)$ 为伪随机二进制信号(PRBS), 噪声 $v(t) = e(t) + 0.5e(t)$, $e(t)$ 为白噪声, 信噪比 $\text{SNR} = 7$.

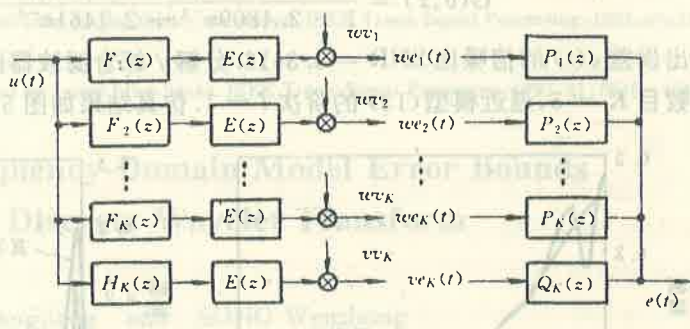


图3 误差 $e(t)$ 的小波变换和重构流程图

标称模型的估计为
$$G(\theta, z) = -\frac{0.9973z^{-1}}{1 - 0.6340z^{-1}}. \quad (16)$$

输出误差 $e(t)$ 的信噪比 $\text{SNR} = 0.1240$. 分解 / 综合滤波器由 Daubechies 小波 $D7^{[13]}$ 构成, 分频数目 $K = 4$, 逼近模型(13)的阶次 $l = 1$. 仿真结果如图 4 所示.

例 2 考虑真实对象

$$G(z) = \frac{0.001z^{-2}(10 + 7.4z^{-1} + 0.924z^{-2} + 0.1764z^{-3})}{1 - 2.14z^{-1} + 1.553z^{-2} - 0.4387z^{-3} + 0.042z^{-4}}. \quad (17)$$

输入 $u(t)$ 为伪随机二进制信号 (PRBS), 噪声为白噪声, 信噪比 $\text{SNR} = 5$.

标称模型的估计为

$$G(\theta, z) = \frac{0.01 - 0.0003z^{-1}}{1 - 2.4809z^{-1} + 2.1461z^{-2} - 0.6577z^{-3}}. \quad (18)$$

输出误差 $e(t)$ 的信噪比 $\text{SNR} = 0.3416$. 分解 / 综合滤波器由 Daubechies 小波 $D7^{[13]}$ 构成, 分频数目 $K = 5$, 逼近模型(13)的阶次 $l = 1$. 仿真结果如图 5 所示.

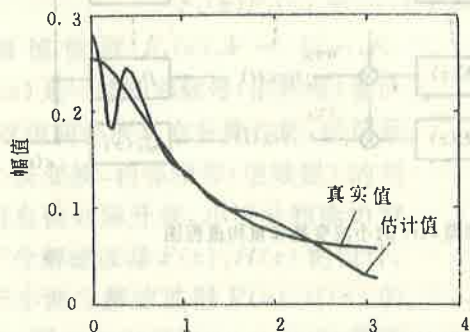


图 4 例 1

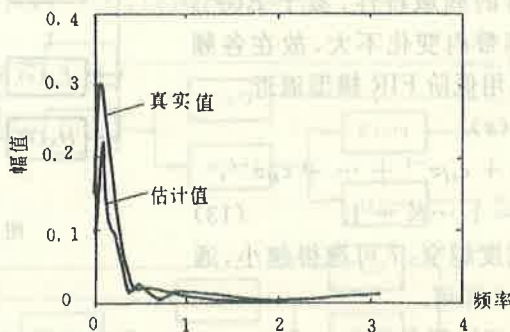


图 5 例 2

5 结束语

本文基于离散小波变换, 利用分频逼近, 估计频域模型误差界(幅值). 估计结果不致于过分保守, 同时, 适当选取分频数目, 即调节频带宽度, 可获得较精确估计. 该方法对噪声的限制条件很弱, 主要是因为采用低阶 FIR 模型逼近, 以及某些非平稳随机噪声经小波变换后具有平稳特性.

参 考 文 献

- 1 Helmicki, A. J., Jacobson, C. A. and Nett, C. N.. Control oriented system identification; a worst-case/deterministic approach in H_∞ . IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36:1163-1176
- 2 Gu, G. and Khargonekar, P. P.. A class of algorithms for identification in H_∞ . Automatica, 1992, 28, 299-312
- 3 Lemaire, R. O., Valavani, L., Athans, M. and Stein, G.. A frequency domain estimator for use in adaptive control system. Automatica, 1991, 27:23-38
- 4 Wahlberg, B. and Ljung, L.. Hard frequency-domain model error bounds from least-squares like identification techniques. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37:900-912
- 5 Goodwin, G. C., Gvers, M. and Ninness, B.. Quantifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37:913-928
- 6 Vries, D. K. and Van den Hof, P. M. J.. Quantification of uncertainty in transfer function estimation: a mixed probabilistic-worst-case. Automatica, 1995, 31:543-557

- 7 Ljung, L. . On the estimation transfer function. Automatica, 1985, 21: 677—696
- 8 Bai, E. W. . Adaptive quantification of model uncertainties by rational approximation. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1991, AC-36: 441—453
- 9 Shensa, M. J. . The discrete wavelet transform; wedding the a trous and mallat algorithms. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40: 2464—2482
- 10 Rioul, O. . A discrete-time multiresolution theory. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41: 2591—2606
- 11 Mallat, S. . Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Trans. Acoust. , Spech, Signal Processing, 1989, 37: 2091—2110
- 12 Vaidyanathan, P. P. . Multirate digital filters, filter banks, polyphase network and applications; a tutorial. Proc. IEEE, 1990, 78: 56—93
- 13 Daubechees, I. . Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA; SIAM, 1992
- 14 Vetterli, M. and Herley, C. . Wavelets and filter banks; theory and design. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40: 2207—2232
- 15 Herley, C. and Vetterli, M. . Wavelets and recursive filter banks. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41: 2536—2556

Quantifying Frequency-Domain Model Error Bounds Based on Discrete Wavelet Transform

XU Changjiang and SONG Wenzhong

(Reserch Institute of Automation, Southeast University • Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: This paper discusses the problem of robust identification. Band-wise approximation based on discrete wavelet transform is proposed for quantifying frequency-domain model error bounds (amplitude). First, the discrete wavelet transform is introduced. Then the band-wise approximation algorithm is addressed. Finally, some simulation examples are given for testing the proposed algorithm.

Key words: robust identification; model error; discrete wavelet transform; band-wise approximation

本文作者简介

徐长江 1965年生。1986年毕业于南京大学数学系, 1989年毕业于浙江大学数学系获硕士学位。现在东南大学自动化研究所攻读博士学位。主要研究方向为系统辨识, 小波分析。

宋文忠 1936年生。1960年毕业于南京工学院动力系, 留校后长期从事工业自动化的教学和研究工作。现为东南大学自动化研究所教授, 博士生导师。