第14卷第2期
1997年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

右独立阶——新的正则状态反馈不变量*

陈树中　曹　立
(华东师范大学数学系·上海,200062)

摘要:本文提出一组新的正则状态反馈不变量——右独立阶,推导了系统传递函数矩阵耦合子真部分在无穷远处的列秩,基本阶和右独立阶的关系.

关键词:基本阶;耦合子;正则状态反馈

1　右独立阶

考虑右可逆时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, m \geq p, \mathrm{rank}C = p, \mathrm{rank}B = m$. 记 c_i 为 C 的第 i 行,$G(s)$ 为(1)的传递函数阵. 系统(1)的无穷零点最大阶为 β[1],第 i 个输出的基本阶为 n_{ie}[2]. 对 y 的第 i 个分量 y_i 求 j 阶导数,$j \leq \beta$,记为 $y_i^{(j)}$,则

$$y_i^{(j)} = c_iA^jx + r_i^j \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(\beta-1)} \end{bmatrix}, \quad r_i^j = [c_iA^{j-1}B \quad c_iA^{j-2}B \quad \cdots \quad c_iB0] \in \mathbb{R}^{m\beta}. \tag{2}$$

将状态和输入的对偶空间分别记为 $\mathscr{X}^*$ 和 $\mathscr{U}^*$,输出空间记为 $\mathscr{Y}$,则 $y_i^{(j)} \in \mathscr{Y} = \mathscr{U}^* + \mathscr{X}^*$.

定义 1　$z, z_i \in \mathscr{Y}$,　$i=1,2,\cdots,l$,称 z 在模 $\mathscr{X}^*$ 意义下可用 z_i,　$i=1,2,\cdots,l$ 线性表出,若存在实数 a_i,　$i=1,\cdots,l$,使得

$$z - \sum_{i=1}^{l} a_iz_i \in \mathscr{X}^*. \tag{3}$$

下面将(3)记为 $z \sim \sum\limits_{i=1}^{l} a_iz_i$.

对输出作置换,可设 $n_{1e} \geq \cdots \geq n_{pe}$,将 $y_i^{(j)}$ 按下列次序排列

$$\underbrace{y_1^{(n_{1e})} \cdots y_p^{(n_{pe})}} \mid \underbrace{y_1^{(n_{1e}-1)} \cdots y_p^{(n_{pe}-1)}} \mid \cdots \mid \underbrace{y_1^{(1)} \cdots}_{n_{1e}} \tag{4}$$

若某个分量 $y_i^{(j)} \sim 0$,则将 $y_i^{(j)}$ 删除.

定义 2　$y_i^{(j)}$ 按(4)排列,$y_i^{(j)}$ 称为右独立,若它不能在模 $\mathscr{X}^*$ 意义下用(4)中在它右边的量线性表出.

由 n_{ie} 的定义知,(4)中第一组每个量右独立.

定义 3　记 $\delta_i = \min\{j \mid y_i^{(j)}$ 右独立$\}$,δ_i 称为第 i 个输出的右独立阶,$y_i^{(\delta_i)}$ 为第 i 个输出的首次右独立向量.

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1994年9月19日收到. 1996年6月3日收到修改稿.

2　基本性质

定理 1　右独立阶是正则静态状态反馈不变量.

证　由右独立阶的定义即得.

定理 2　右独立阶是正则动态状态反馈不变量.

证　设正则动态状态反馈为 $u(s)=F(s)x(s)+Hv(s)$. $F(s)$ 的状态空间实现为 (C_c,A_c,B_c,D_c)，则它等价一个补偿器

$$\begin{cases}\dot z = A_c z + B_c x,\\ u = C_c z + D_c x + Hv.\end{cases} \tag{5}$$

合并(1),(5)两式得

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot z\end{bmatrix} = [\bar A + \bar B\,\bar K]\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \bar B H v,\\ y = \bar C\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{6}$$

$$\bar A = \begin{bmatrix}A & 0\\ B_c & A_c\end{bmatrix},\quad \bar B = \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix},\quad \bar K = [D_c, C_c],\quad \bar C = [C\quad 0].$$

直接计算知 $\bar C\,\bar A^i\bar B = CA^iB, i=0,1,\cdots$. 因此系统 $(\bar C,\bar A,\bar B)$ 的右独立阶 $\bar\delta_i$ 满足 $\bar\delta_i=\delta_i, i=1,\cdots,p_0$. 由(6)与定理1即得结论.

定理 3　右独立阶在输入变换 $u(s)=T(s)v(s)$ 下不变，其中 $T(s)$ 是有理么模阵.

证　由于 $T(s)$ 可由正则动态反馈实现[3]，由定理2即得结论.

对右可逆系统(1)，存在唯一的下三角多项式矩阵 $\Phi[s]$ 和有理么模阵 $U(s)$，使得

$$G(s) = [\Phi^{-1}[s]0]U(s),$$

$\Phi(s)$ 第 i 阵的阶为 n_{ie}[4]. 将 $\Phi[s]$ 表示成

$$\Phi[s] = W(s)\Lambda(s),\quad \Lambda(s) = \mathrm{diag}[s^{n_{1e}}\cdots s^{n_{pe}}]. \tag{7}$$

$W(s)$ 是真有理函数阵，称为传递函数阵耦合子 $\Phi[s]$ 的真部分，记 $r^*=\mathrm{rank}\lim\limits_{s\to\infty}W(s)$，$r^*$ 称为耦合子真部分在无穷远处的列秩.

定理 4　对耦合子真部分 $W(s)$ 作无穷远分解[1]

$$W(s) = V_1(s)T(s)V_2(s), \Pi(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s^{m_1}}\cdots\frac{1}{s^{m_p}}\right],$$

其中 $V_1(s),V_2(s)$ 是有理么模阵，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_p\geqslant 0$，则

1) $\{n_{ie}-\delta_i, i=1,\cdots,p\}=\{m_i, i=1,\cdots,p\}$，

2) r^* 等于 $\{n_{ie}-\delta_i, i=1,\cdots,p\}$ 中的零的个数.

证　由(7)得

$$\Lambda(s)y(s) = [V_2^{-1}(s)\Pi^{-1}(s)\quad 0]\begin{bmatrix}U_1^{-1}(s) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}U(s)u(s). \tag{8}$$

记 $u(s)$ 前边 p 个分量为 $v(s)$，由定理3，(8)式可简化为

$$\Lambda(s)y(s) = V_2^{-1}(s)\Pi^{-1}(s)v(s) \tag{9}$$

将 $V_2^{-1}(s)$ 展开，$V_2^{-1}(s) = M_0 + \frac{M_1}{s} + \cdots$，(9)式可等价表示为

$$\begin{bmatrix}y_1^{(n_{1e})}\\ \vdots\\ y_p^{(n_{pe})}\end{bmatrix} \sim [M_0\cdots M_{m_1}]\begin{bmatrix}Q_0\\ \vdots\\ Q_{m_1}\end{bmatrix},\quad Q_j = \begin{bmatrix}u_1^{(m_1-j)}\\ \vdots\\ u_p^{(m_p-j)}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Q_j 中某分量导数次数小于零,则用状态 x 代替. 将 m_i 分组

$$m_1 = \cdots = m_{t_1} > m_{t_1+1} = \cdots = m_{t_1+t_2} > \cdots > m_{t_1+\cdots+t_{p-1}+1} = \cdots = m_p, \tag{11}$$

记 $l_i = m_{t_1+\cdots+t_i}, i = 1,\cdots,k$,则 $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$,对应将 $v(t)$ 分组,$v(t) = [q_1^{\mathrm{T}}\cdots q_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, q_i \in \mathbb{R}^{t_i}$,则 Q_j 可表示为

$$Q_j = \begin{bmatrix} q_1^{(l_1-j)} \\ \vdots \\ q_{i-1}^{(l_{i-1}-j)} \\ x \end{bmatrix}, \quad l_i < j \leqslant l_{i-1}, \quad i = 2,\cdots,k. \tag{12}$$

在(10)式两边逐次积分,则有

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{l_1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{l_1} \\ 0 & M_0 & \cdots & M_{l_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{l_1} \end{bmatrix}, \quad Y_j = \begin{bmatrix} y_1^{(n_{1e}-j)} \\ y_2^{(n_{2e}-j)} \\ \vdots \\ y_p^{(n_{pe}-j)} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

考虑(13)中相应 Y_{l_1} 的部分

$$Y_{l_1} \sim M_0 Q_{l_1}, \quad Q_{l_1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ x \end{bmatrix}.$$

记 $M_0 = [\overline{M}_1 \cdots \overline{M}_k], \overline{M}_i \in \mathbb{R}^{p\times t_i}$,则 $Y_{l_1} \sim \overline{M}_1 q_1$. 因为 M_0 非奇异,$\overline{M}_1$ 列满秩,由右独立定义,Y_{l_1} 中存在 t_1 个分量 $y_{1_j}^{(n_{1_j e}-l_1)}, j = 1,\cdots,t_1$,首次右独立. 从而 $n_{1_j e} - \delta_{1_j} = l_1, j = 1,\cdots,t_1$,记集合 $\{1_j, j = 1,\cdots,t_1\}$ 为 S_1.

考虑(13)式中相应于 $Y_{l_2},\cdots,Y_{l_1}$ 部分,则有

$$\begin{bmatrix} Y_{l_2} \\ \vdots \\ Y_{l_1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{l_1-l_2} \\ 0 & M_0 & \cdots & M_{l_1-l_2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{l_2} \\ \vdots \\ Q_{l_1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} [\overline{M}_1 \overline{M}_2] & z & \cdots & z \\ 0 & \overline{M}_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{M}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^{(l_1-l_2)} \\ q_2 \end{bmatrix} \\ q_1^{(l_1-l_2-1)} \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix}.$$

变量 z 表示 M_i 中删去部分列后剩余的量,由 $\overline{M}_1$ 列满秩和矩阵的上三角形式知,任一 $i \notin S_1$,则 $y^{(n_{ie}-j)}, l_2 < j \leqslant l_1$ 不可能右独立,另一方面,由于 $[\overline{M}_1, \overline{M}_2]$ 列满秩,所以 Y_{l_2} 中存在 t_2 个分量 $y_{2_j}^{(n_{2_j e}-l_2)}, j = 1,\cdots,t_2$,首次右独立. 因此,$n_{2_j e} - \delta_{2_j} = l_2, j = 1,\cdots,t_2$,记 $S_2 = \{2_j, j = 1,\cdots,t_2\}$,则 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. 类似地讨论 $Y_{l_3,\cdots,l_1}$ 直到 $Y_{l_k}\cdots y_{l_1}$,可得集合 $S_i, i = 1,\cdots,k, S_i$ 有 t_i 个元素,$S_i \cap S_j = \varnothing$, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = \{1,\cdots,p\}$,满足 $n_{i_j e} - \delta_{i_j} = l_i, i = 1,\cdots,k, j = 1,\cdots,t_i$,即定理结论 1) 成立. 因为 r^* 等于 $\{m_i, i = 1,\cdots,p\}$ 中零的个数,由结论 1)即得结论 2).

参考文献

1 Vardulakis, A. I. G. et al.. Structure and Smith-MacMillan form of a retional matrix at infinity. Int. J. Control, 1982, 35: 701—725

2 Commault, C. et al.. New decoupling invariants: the essential orders. Int. J. Control, 1986, 44: 639—700

3 Dion, J. M. and Commault. C.. The minimal delay decoupling problem: feedback, implementation with stability. SIAM. J.

Contr. ,and Optimiz,1988,26:66—82

4 Herrera, A. N. and Lafag. J. F.. New redults about Morgan' s problem. IEEE Trans. Automat. Contr. ,1993,AC-32:1834—1838

Right Independent Orders:a New Invariants under State Feedback

CHEN Shuzhong and CAO Li

(Department of Mathematics,East China Normal University · Shanghai,200062,PRC)

Abstract: In this paper we present a new invariants called right independent orders, which are invariant values under the action of regular state feedback. The relation among the column rank of infinity of the interactor of transfer matrix, essential orders and right independent orders is established.

Key words: essential orders; interactor; regular state feedback

本文作者简介

陈树中　1943 年生. 1965 年毕业于南京大学数学系,现任华东师范大学数学系教授. 主要研究领域有解耦,分散控制,奇异系统和控制理论在工业中的应用.

曹　立　1961 年生. 1984 年毕业于上海华东师范大学数学系,1987 年获华东师范大学数学系控制理论硕士学位. 现为华东师范大学数学系副教授. 主要研究方向是非线性系统,智能系统.

国际会议消息

（转载 IFAC NEWSLETTER 1997,No. 2）

Title	1997	Place	Deadline	Further Information
IFAC Conference System Structure and Control	Oct. 23-25	Bucharest Romania	1 June 1997	IFAC SSC97 Secretariat Polytehnica Univ. of Bucharest Fac. of Control & Comp. Splaiul Independentei 313 RO-77206 Bucharest 6, Romania e-mail:ssc97@indinf. pub. ro
IFAC/(IFIP/IEEE) Workshop Safety and Reliabiltiy in Emerging Control Technologies	Oct. 29-31	Tallinn Estonia	15 June 1997	Prof. Leo Motus Estonian Association of Engineers Ehitajate tee 5, Tallinn EE 0026, Estonia e-mail: leo@cc. ttu. ee
EPS/IFAC Intl. Conference Accelerator and Large Experimental Physics Control Systems ICALEPCS 97	Nov. 3-7	Beijing China, P. R.	1 June 1997	Prof. Jijiu Zhao Institute of High Energy Physics, POB 918(10) Beijing, 100039, China, P. R. FAX+86/10/821 3374 e-mail: icalepcsj@bepc2. ihep. ac. cn www. ihep. ac. cn/ins/IHEP/div 10/icalepcs/ idex. html

（下转第 243 页）

any case. The simulation results show the effectiveness of the method.

Key word: Fuzzy inferences; PID control; Self-tuning

本文作者简介

李　卓　女. 1961年生. 副教授. 1982年和1995年分别在鞍山钢铁学院机电系和清华大学自动化系获得学士学位和硕士学位. 目前主要从事模糊控制、神经网络控制与计算机控制等方面的研究工作.

萧德云　1945年生. 教授. 1970年毕业于清华大学. 主要从事过程控制系统、辨识建模、故障诊断、计算机应用和大型连续过程工业CIMS等的研究与教学工作.

何世忠　1945生. 教授, 1970年毕业于清华大学, 1982年获清华大学硕士学位, 1989年赴新加坡国立大学从事科学研究三年. 主要研究方向为过程控制、模糊控制等.

(上接第227页)

Title	1998	Place	Deadline	Further Information
IFAC Symposium Intelligent Autonomous Vehicles —I A V 98	March 25-27	Madrid Spain	16 May 1997	IAV'98 Universidad Carlos Ⅲ de Madrid c/Butarque 15 E-28911 Leganes (Madrid), Spain FAX+34 1 624 9430 e-mail: iav @ing. uc3m. es www. uc3m. es/iav98
IFAC/CIGR Workshop Artificial Intelligence in Agriculture	April 24-26	Makuhari Japan	1 Sept. 1997	Prof. Y. Hashimoto Dept. of Biomechanical Systems Ehime University Tarumi, Matsuyama 790, Japan FAX+81 89 947 8748 e-mail: hasimoto@agr. ehime-u. ac. jp
IFAC Workshop Intelligent Assembly and Disassembly	May 21-23	Ljubljana Slovenia	31 Oct. 1997	Dr. D. Noe Fac. of Mechanical Engg. ,Askerceva 6 SLO-1000 Ljubljana, Slovenia FAX+386/61/218567 e-mail: dragica. noe@fs. uni-lj. si
IFAC Workshop Control Applications in Post-Harvest and Processing Technology -CAPPT'98	June 3-5	Budapest Hungary	15 Nov. 1997	Prof. I. Farkas Dept. of Physics and Process Control University of Agriculture H-2103 Gödöllö, Hungary FAX+36 28 310804 e-mail: ifarkas@eng. gau. hu
IFAC Symposium Information Control Problems in Manufacturing—INCOM'98	June 24-26	Nancy France	8 Sept. 1997	INCOM '98/CRAN-GSIP Faculté des Sciences Université Henri Paincaré Nancy I, BP 239 F-54506 Vandoeuvre les Nancy, France FAX+33/83 91 21 26 e-mail: incom98@cran. u-nancy. fr www. gsip. cran. u-nancy. fr/incom98. html

(下转第253页)