第 14 卷第 2 期
1997 年 4 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

分布参数系统的输出变结构控制

岳 东
(中国矿业大学信息与电气工程学院·徐州,221008)

刘永清 高存臣
(华南理工大学自动控制工程系·广州,510641)

摘要: 对一类不确定分布参数系统,本文给出一输出变结构控制设计. 不同于以往文献的工作,这里给出的控制仅利用了系统的输出量,因此所设计的控制是有限维的. 最后给出一仿真实例.

关键词: 分布参数系统; 变结构控制; 切换函数; 李雅普诺夫函数; 自适应

1 引 言

对由偏微分方程描述的分布参数系统,如何设计其有限维控制器是非常重要的. 对确定型分布参数系统,控制器设计的主要方法是构置有限维补偿器. 这方面的研究工作主要有[1][2]. 然而,实际系统中,不可避免会受到如外扰动,参数摄动等不确定因素的影响[4],此时[1][2]中所提方法将失效. 对不确定分布参数系统,在假设系统状态可测得条件下,[3]中利用变结构系统理论给出了变结构控制的综合和设计方法. 然而,由于控制的实现需要直接利用系统状态值,因此[3]中所给控制是无限维的.

在假设系统主体部分是最小相位情形下,利用系统输出,本文提出一有限维变结构控制设计方法. 最后给出一数值实例说明设计方案的有效性.

2 准备工作

考虑如下不确定分布参数系统

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{B}\eta(t), \\ y(t) = \bar{C}\,\bar{x}(t).\end{cases} \tag{1}$$

这里 $\bar{x}(t) \in \mathrm{H}$, H 是一 Hilbert 空间. 算子 $\bar{A}$ 是时不变,无界的,且其谱中不含连续谱与残余谱. $\overline{D(A)} = \mathrm{H}$. $\eta(t)$ 表示外扰动,它的变化界是已知的,即存在 $\zeta > 0$, 使 $\|\eta\| \leqslant \zeta$. 这里 $\|\cdot\|$ 表示范数.

控制器由 M 个驱动器构成,即

$$\bar{B}u = \sum_{i=1}^{M} b_i u_i(t), \tag{2}$$

$b_i \in \mathrm{H}$ 为影响系数.

观测器由 l 个传感器组成,即

$$y_j(t) = \langle c_j, \bar{x}(t) \rangle, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{3}$$

其中 $c_j \in \mathrm{H}$ 为影响系数. 显然,以上输入、输出算子 $\bar{B}, \bar{C}$ 具有有限秩. 而(1)～(3)表示一大类分布参数系统,它们的控制与观测是作用在系统内部.

假设 1 对 $\forall\, \alpha < 0$, $\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(A) : R_e\lambda > -a\}$ 是有限集. 取 $\sigma_2 = \sigma(A)/\sigma_1$, 则 $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. 而对应 $\sigma(A)$ 的分解谱集 σ_1, σ_2, H 可分解成如下形式

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_N \oplus \mathrm{H}_R,$$

本文于 1994 年 6 月 23 日收到. 1996 年 6 月 6 日收到修改稿.

另外，H_N，H_R 是 A 不变的.

用 P_N，P_R 分别表示 H_N，H_R 的投影算子. 因此，(1)可分解为如下形式

$$\dot{\bar{x}}_N = \bar{A}_N\bar{x}_N + \bar{B}_N u + \bar{B}_N\eta, \tag{4a}$$

$$\dot{\bar{x}}_R = \bar{A}_R\bar{x}_R + \bar{B}_R u + \bar{B}_R\eta, \tag{4b}$$

$$y = \bar{C}_N\bar{x}_N + \bar{C}_R\bar{x}_R. \tag{4c}$$

这里 $\bar{x} = \bar{x}_N + \bar{x}_R$，$\bar{A}_N = P_N\bar{A}_N P_N$，$\bar{B}_N = P_N\bar{B}$，$\bar{C}_N = \bar{C}P_N$，$\bar{C}_R = \bar{C}P_R$，$\bar{A}_R = P_R\bar{A}P_R$. 显然，除了 $\bar{A}_R$ 以外，其余算子都是有界的. $\bar{B}_R u$ 与 $\bar{C}_R\bar{x}_R$ 分别表示控制溢出与观测溢出.

假设 2　$\bar{A}_R$ 在 H_R 中生成一 C_0 半群 $T_R(t)$，$t \geqslant 0$，且满足

$$\| T_R(t) \| \leqslant e^{-\lambda_R t}, t \geqslant 0, \lambda_R > 0.$$

在以下分析中，将用 A_N，B_N，C_N，B_R，C_R，A_R 表示 $\bar{A}_N$，$\bar{B}_N$，$\bar{C}_N$，$\bar{B}_R$，$\bar{C}_R$，$\bar{A}_R$ 对应 H 中适当基下的矩阵表示. 用 x_N，x_R 表示在此基下 $\bar{x}_N$，$\bar{x}_R$ 对应的 R^N，l^2 中的元素. 此时(4)可以表示成

$$\dot{x}_N = A_N x_N + B_N u + B_N\eta, \tag{5a}$$

$$\dot{x}_R = A_R x_R + B_R u + B_R\eta, \tag{5b}$$

$$y = C_N x_N + C_R x_R. \tag{5c}$$

由假设 2 易知　　$\| e^{A_R t} \| \leqslant e^{-\lambda_R t}, t \geqslant 0, \lambda_R > 0.$

假设 3　主体部分(A_N，B_N，C_N)是可控和可观的. B_N 列满秩且存在矩阵 F 使 FCB 是非奇异的. 另外 $FC_N(sI-A_N)^{-1}$是最小相位的. 这里 $CB=(\langle c_i,b_j\rangle)$，$i=1,2\cdots,l$；$j=1,2\cdots,m$.

3　控制的设计

由于 B_N 列满秩，因此存在非奇异矩阵 T 使

$$TB_N = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad |B_0| \neq 0,$$

取变换 $z = Tx_N$，则由(5)得

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2, \tag{6a}$$

$$\dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_0 u + B_0\eta, \tag{6b}$$

$$\dot{x}_R = A_{12}x_R + B_R u + B_R\eta, \tag{6c}$$

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_R z_R. \tag{6d}$$

这里　$$TA_N = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_0, \quad C_N T^{-1} = [C_1, C_2],$$

由于 $FC_N B_N = FC_2 B_0$ 且 $FC_N(sI - A_N)^{-1}B_N = F[C_1,C_2](sI - A_0)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}$，由假设 3 易知，$FC_2B_0$ 是非奇异的且 $F[C_1,C_2](sI - A_0)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}$是最小相位的. 进而，由[5]中定理知，$A_{11} - A_{12}(FC_2)^{-1}FC_1$ 是严格稳定的.

取切换函数为

$$\sigma = Fy = FC_1z_1 + FC_2z_2 + FC_Rx_R, \tag{7}$$

由于 FC_2B_0 与 B_0 均非奇异，因此(7)中 FC_2 也是非奇异的.

由(7)可推知

$$z_2 = -(FC_2)^{-1}FC_1z_1 - (FC_2)^{-1}FC_Rx_R + (FC_2)^{-1}\sigma, \tag{8}$$

将(8)代入(6a)得

$$\dot{z}_1 = (A_{11} - A_{12}(FC_2)^{-1}FC_1)z_1 - A_{12}(FC_2)^{-1}FC_R x_R + A_{12}(FC_2)^{-1}\sigma$$
$$\triangleq G_1 z_1 + G_2 x_R + G_3 \sigma. \tag{9}$$

对 σ 关 t 求导得

$$\dot{\sigma} = D_1 z_1 + D_2 x_R + FCBu + FCB\eta + D_3\sigma. \tag{10}$$

这里
$$D_1 = FC_1(A_{11} - A_{12}(FC_2)^{-1}FC_1) + FC_2A_{21} - FC_{222}(FC_2)^{-1}FC_1,$$
$$D_2 = FC_RA_R - FC_1A_{12}(FC_2)^{-1} - FC_RA_{22}(FC_2)^{-1}FC_R,$$
$$D_3 = FC_1A_{12}(FC_2)^{-1} + FC_2A_{22}(FC_2)^{-1}.$$

由于 $G_1 = A_{11} - A_{12}(FC_2)^{-1}FC_1$ 是严格稳定的，对任意正定矩阵 Q，下面的 Lyapunov 矩方程有唯一正定解 P

$$G_1^{\mathrm{T}}P + PG_1 = -Q,$$

设计控制律 u 为

$$u = -(FCB)^{-1}D_3\sigma - (FCB)^{-1}\delta_1\sigma - (FCB)^{-1}\delta_2\mathrm{sgn}(\sigma), \tag{11}$$

这里 δ_1,δ_2 将在后面给出.

构造 Lyapunov 函数为

$$V = a_1(z_1^TPz_1)^{1/2} + a_2(\sigma^T\sigma)^{1/2} + \langle x_R, x_R\rangle^{1/2},$$

则结合(6a),(9),(10)可推得

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant -(&a_1\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}^{-1}(P) - a_2\|D_1\|)\|z_1\| - [a_2\delta_1 - a_1\|G_3\|\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}^{-1}(P) \\ &- \|B_R\|\,\|(FCB)^{-1}\|(\|D_3\| + \delta_1)]\|\sigma\| - \lambda_R\|x_R\| \\ &- (a_2\delta_2 - \|B_R\|(FCB)^{-1}\|\delta_2 - \|B_R\|\,\|\eta\| - a_2\|FCB\|\,\|\eta\| \\ &- [a_1\|G_2\|\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}^{-1}(P) + a_2\|D_2\|]\|x_R\|).\end{aligned} \tag{12}$$

定理 1 选取 a_1,a_2,δ_1 和 δ_2 满足

$$a_2\delta_1 - a_1\|G_3\|\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}^{-1}(P) - \|B_R\|\,\|(FCB)^{-1}\|(\|D_3\| + \delta_1) > 0,$$
$$a_1\lambda_{\max}(Q)\lambda_{\max}(P) - a_2\|D_1\| > 0,$$
$$a_2 - \|B_R\|\,\|(FCB)^{-1}\| > 0,$$

且

$$\begin{aligned}\delta_2 > \frac{1}{a_2 - \|B_R\|\,\|(FCB)^{-1}\|}[&(\|B_R\| + a_2\|FCB)^{-1}\|)\|\eta\| \\ &+ (a_1\|G_2\|\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}^{-1}(P) + a_2\|D_2\|)(\|B_R\|m(t) + 1)].\end{aligned}$$

其中 $m(t)$ 满足下面的方程

$$\dot{m}(t) = -\lambda_R m(t) + \|u\| + \zeta, \tag{13}$$
$$m(0) = 0.$$

若假设 1,2,3 成立，则在控制(11)作用下，系统(1)的闭环系统解是渐近稳定的.

证 由(6c)可推知

$$x_R = \mathrm{e}^{-\lambda_R t}x_{R_0} + \mathrm{e}^{-\lambda_R t}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_R\tau}B_R(u + \eta)\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

定义 $m(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_R t}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_R\tau}(\|u\| + \zeta)\mathrm{d}\tau$ 则 $m(t)$ 满足系统(3). 另外，由(14) 易证，存在某正常数 T，当 $t > T$ 时

$$\|x_R\| \leqslant 1 + \|B_R\|m(t) \tag{15}$$

结合(15)及定理 1 中条件易推知，$\dot{V} < 0$. 因此我们可知 $\|z_1\| \to 0$, $\|x_R\| \to 0$, $\|\sigma\| \to 0$,

$(t \to \infty)$，从而由(8)得 $\|z_2\| \to 0, (t \to +\infty)$.　　证毕.

定理 2　若定理 1 中条件成立且 $\delta_2 > \|FCB\|\zeta + \beta, \beta > 0$，则在控制(11)作用下，切换面 $\sigma = 0$ 于有限时间可达.

证　取 $V_1 = \sigma^{\mathrm{T}}\sigma/2$，则有

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma[D_1 z_1 + D_2 x_R + D_3\sigma + FCBu + FCB\eta] \\ &\leqslant (\|D_1\|\|z_1\| + \|D_1\|\|x_R\|)\|\sigma\| - \delta_1\|\sigma\|^2 \\ &\quad + \|FCB\|\|\sigma\|\zeta - \delta_2\|\sigma\|.\end{aligned}$$

由定理 1 知，当 $t \to +\infty$ 时，$\|z_1\| \to 0$，$\|x_R\| \to 0$. 因此，存在 $T_0 > 0$ 使 $\|D_1\|\|z_1\| + \|D_2\|\|x_R\| \leqslant \beta, t > T_1$ 因此有

$$\dot{V} < -\|\sigma\| - \delta_1\|\sigma\|^2, \quad t > T_1.$$

由此我们可推知定量 2 成立.　　证毕.

4　例　子

考虑如下一维系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5\pi^2 z + b(x)u(t) + b(x)\eta(t), \\ z(x,0) = z_0(x), x \in (0,1), \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, \\ y = \langle c(x), z(x,t)\rangle = \displaystyle\int_0^1 c(x)z(x,t)\mathrm{d}x.\end{cases} \tag{16}$$

这里 $\|\eta\| \leqslant 1$.

为数值计算方便，我们选取系统的前 4 级特征展开. 因此，输出影响系数 $b(x)$ 和 $c(x)$ 可表示成

$$b(x) = 6\sin\pi x - 3\sin 2\pi x + 2\sin 3\pi x + 1.5\sin 4\pi x,$$

$$c(x) = -2\sin\pi x - 3\sin\pi x + \frac{10}{27\pi^2}\sin 3\pi x + \frac{10}{64\pi^2}\sin 4\pi x.$$

取 $F = 1$ 且切换函数为 $\sigma = y$，构造自适应律 $m(t)$ 为

$$\dot{m}(t) = -4\pi^2 m(t) + |u| + 1, \quad m(0) = 0.$$

选取 $a_1 = 22.5, a_2 = 10$ 且设计控制律 u 为

$$u = 178\sigma + (21 + 18m(t))\mathrm{sgn}(\sigma). \tag{17}$$

如下 4 个图表示在控制(17)作用下，系统(16)前四个模态的动态响应仿真结果.

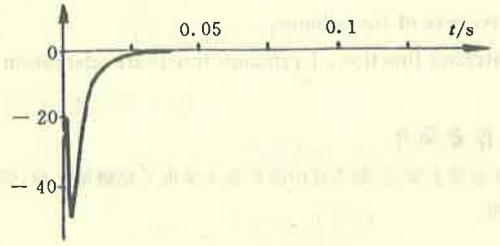

图 1　模态 1 的动态响应

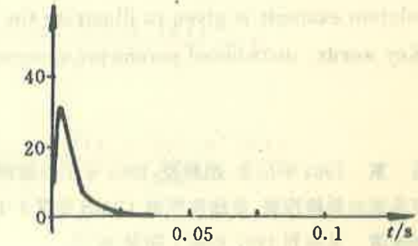

图 2　模态 2 的动态响应

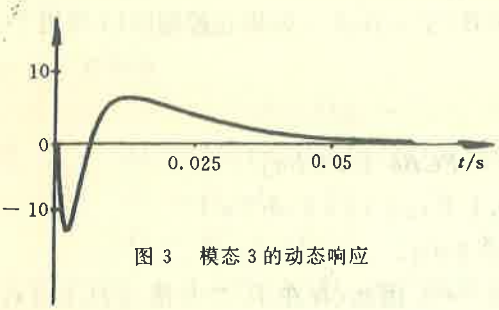

图 3 模态 3 的动态响应

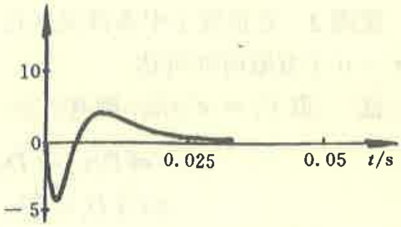

图 4 模态 4 的动态响应

5 结 论

本文研究了一类分布参数系统的输出镇定问题，提出一输出变结构控制设计方法. 所给控制仅利用了系统的输出量，因此是有限维的. 最后给出的仿真实例表明，本文方法是有效的.

参 考 文 献

1 Tzafestas, S. G.. Distributed parameter conrtol systems. Oxford New York, 1982

2 Ito K.. Finite-dimensional compensator for Infinite-dimensional systems Via Galerkin-type approximation. SLAM. J. Control and Optimization, 1990, 28(3): 1251—1269

3 Orliv, Yu. V. and Utkin, V. I.. Sliding mode control in infinite-dimensional system. Automatica, 1987, 23(6): 753—757

4 Utkin, V. I.. Sliding mode in control and optimization. Spinger-Verlag, New York, 1992

5 Zhihua Qu. Robust control of a clss of nonlinear uncertain systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(9): 1437—1442

Output Variable Structure Conrtol of Distributed Parameter Systems

YUE Dong

(College of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology · Xuzhou, 221008, PRC)

LIU Yongqing and GAO Cunchen

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: A design method of the output variable structure control is proposed for a class of distributed parameter systems. Since the output of the system is only used, the given control is finite dimensinal. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the scheme.

Key words: distributed parameter systems; switching function; Lyapunov function; adaptation

本文作者简介

岳 东 1964 年出生. 副教授，1995 年于华南理工大学获博士学位，如今在中国矿业大学电工站做博士后，研究兴趣是不确定系统的鲁棒控制，非线性控制，CIMS 在煤矿中的应用.

刘永清 见本刊 1997 年第 1 期第 33 页.

高存臣 1956 年生. 1978 年毕业于烟台师范专科学校数学系，1986 年于安徽大学基础数学助教进修班结业. 现为烟台师范学院教授，华南理工大学自动控制工程系控制理论与应用专业博士研究生. 感兴趣的研究方向为大系统控制理论与应用；变结构控制理论与应用.