

多变量自适应极点配置的递推算法

李俊民 万百五

高淑萍 邢科义

(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049) (西安电子科技大学应用数学系·西安, 710071)

摘要: 本文提出一个递推计算控制器参数的方法, 得到具有两层迭代过程的多变量自适应极点配置算法, 大幅度减少了在线计算量, 同时在辨识算法中利用投影方法, 证明了该算法的稳定性和收敛性, 引入前馈环节, 保证了稳态解耦及跟踪。仿真例子还验证了该算法的有效性。

关键词: 递推极点配置算法; 多变量系统; 收敛性和稳定性。

1 引言

多变量自适应极点配置算法根据辨识器不同而分为直接和间接算法。直接算法需辨识的参数较多, 同时算法收敛性和稳定性难于分析, 这些是它的不足; 间接算法尽管需估计参数相对较少, 但要在线计算矩阵方程, 占用了太多的时间, 对于采样周期很短的采样系统很难适用^{[2],[3]}。本文对间接算法中的 Diophantine 方程, 采用按列展开的方法, 将矩阵方程化为线性方程组, 提出了一次递推算法, 建立了多变量自适应极点配置的递推算法, 大大减少了计算 Diophantine 方程的时间, 同时推广文[1]的方法证明了该算法的局部收敛性, 引入前馈环节, 使该算法实现了渐近跟踪。

在第二节介绍求解极点配置方程的一步迭代算法; 多变量自适应极点配置的递推算法在第三节给出; 第四节证明该算法的局部收敛性; 最后仿真例子验证了该算法的正确性。

2 矩阵 Diophantine 方程的一步迭代算法

设线性离散的 MIMO 系统为

$$A(D)y(t) = B(D)u(t). \quad (1)$$

其中 $y(t), u(t)$ 分别是 q 维输出和 q 维输入向量, $A(D), B(D)$ 均是 $q \times q$ 的后移算子 D 的多项式阵, 且 $A(D) = I + A_1D + \dots + A_nD^n, B(D) = B_1D + \dots + B_nD^n$, 假设 $A(D), B(D)$ 是相对左互质, 引入如下控制器方程

$$u(t) = -K(D)P^{-1}(D)y(t) + Ev(t). \quad (2)$$

其中 $K(D), P(D)$ 均是 $q \times q$ 维算子 D 的多项式阵, E 是后面将要确定的常数阵, $v(t)$ 是已知的时变有界的参考输入向量。

由(1)式和(2)式可得到系统的闭环方程为

$$y(t) = P(D)[A(D)P(D) + B(D)K(D)]^{-1}B(D)Ev(t). \quad (3)$$

设 $A^*(D)$ 的选择是事先给定的稳定多项式阵(即使 $|\det A^*(D)| = 0$ 的根位于单位圆外), 它是 $q \times q$ 维的, 且次数为 $2n - 1$ 次。选取 $K(D), P(D)$ 的阶次均为 $n - 1$ 次, 则它们可由下面的 Diophantine 方程唯一确定

$$A(D)P(D) + B(D)K(D) = A^*(D), \quad (4)$$

(4)式是算子矩阵方程等价于下式的矩阵方程

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 I & & & & 0 & & \\
 A_1 & I & & & B_1 & 0 & \\
 \vdots & A_1 & & & \vdots & B_1 & \ddots \\
 & & \ddots & & I & & 0 \\
 A_n & \cdots & & A_1 & B_n & \cdots & B_1 \\
 & & & A_n & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & A_n & & B_n
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{nq \text{ 列}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{nq \text{ 列}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 P_0 \\
 \vdots \\
 P_{n-1} \\
 K_0 \\
 \vdots \\
 K_{n-1}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 A_0^* \\
 A_1^* \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 A_{2n-1}^*
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 2nq \times q \\
 2nq \times 2nq
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
 K(D) &= K_0 + \cdots + K_{n-1}D^{n-1}, \\
 P(D) &= P_0 + \cdots + P_1D^{n-1}, \\
 A^*(D) &= A_0^* + A_1^*D + \cdots + A_{2n-1}^*D^{2n-1},
 \end{aligned}$$

不失一般性,取 $A_0^* = I$, 则 $P_0 = I$.

引理 1 设 A, B, C 是适当维数三个常数阵, 则

$$[ABC] = \{C^* \oplus A\}[B].$$

其中 $[X]$ 表示矩阵 X 按列展开, $C^* \oplus A$ 是矩阵 C^* 和 A 的 Kronecker 乘积^[6].

在(5)式中, 分别记 S 为由 $A(D)$ 和 $B(D)$ 的系数阵所构成的 Sylvester 阵, X 为由 $P(D)$, $K(D)$ 的系数所构成的阵, Y 为 $A^*(D)$ 系数阵所形成的阵, 则(5)式可写为

$$SX = Y, \quad (6)$$

利用引理 1, 把(6)式两端按列展开, 得如下线性方程组

$$\{I^* \oplus S\}[X] = [Y]. \quad (7)$$

其中 I 为单位阵.

记 $Z \triangleq \{I \oplus S\}$, $[X] \triangleq W$, $[Y] \triangleq T$, 显然 Z 是 $2nq^2$ 维方阵, W 和 T 都是 $2nq^2$ 维向量.

(7)变为

$$ZW = T. \quad (8)$$

下面给出一步迭代求解(8)式的算法.

设 $W(t-1)$ 为已知, $W(t)$ 可由如下有约束优化问题来确定

$$\begin{cases}
 \min \frac{1}{2} \|W(t) - W(t-1)\|^2, \\
 \text{s. t. } Z_i W(t) = T_i, \\
 i = t \bmod (2nq^2) + 1, \\
 t \geq 0.
 \end{cases} \quad (9)$$

其中 Z_i 是 Z 的第 i 列, T_i 是 T 的第 i 个分量

由(9)式得到如公式

$$\begin{cases}
 W(t) = W(t-1) - \frac{Z_i(Z_i W(t-1) - T_i)}{Z_i^* Z_i}, \\
 i = t \bmod (2nq^2) + 1, \\
 t \geq 0, \quad W(-1) \text{ 事先给定.}
 \end{cases} \quad (10)$$

定理 1 若 $A(D), B(D)$ 相对左互质, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ZW(t) = T.$$

证 记: $e_i(t) \triangleq T_i - Z_i^T W(t-1)$, $\tilde{W}(t-1) \triangleq W - W(t-1)$, W 是(8)式精确解, 由(10)式得

$$\tilde{W}(t) = \tilde{W}(t-1) - \frac{Z_i e_i(t)}{Z_i^T Z_i},$$

$$\text{则 } \|\tilde{W}(t)\|^2 = \|\tilde{W}(t-1)\|^2 - \frac{e_i^2(t)}{Z_i^T Z_i} \leq \|\tilde{W}(t-1)\|^2 - \frac{e_i^2(t)}{M}.$$

$$\text{其中 } M = \max_{1 \leq i \leq 2nq^2} \{Z_i^T Z_i\} > 0,$$

$$\text{则 } \|\tilde{W}(t)\|^2 \leq \|\tilde{W}(0)\|^2 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^t e_{i\tau}^2(\tau),$$

$$\text{所以 } \lim_{t \rightarrow \infty} e_{i(t)}(t) = 0.$$

$$\text{因为 } \|W(t) - W(t-1)\|^2 = \frac{e_{i(t)}^2(t)}{Z_i^T Z_i} \leq \frac{e_{i(t)}^2(t)}{m}, \quad (m = \min_{1 \leq i \leq 2nq^2} \{Z_i^T Z_i\} > 0),$$

$$\text{所以 } \lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t) - W(t-1)\| = 0.$$

$$\text{类似于文[7]得 } \lim_{t \rightarrow \infty} ZW(t) = T.$$

引理 2 $A(D), B(D)$ 相对左互质的充要条件是 Z 为非奇异阵^[4]

推论 1 (1) 式产生的序列 $\{W(t)\}$ 收敛于 $Z^{-1}T$.

注 利用(10)式来解控制器参数的算法的计算量与参数个数($2nq^2$)是同级的, 大大减少了计算量, 代价是算法开始时控制误差较大, 这在后面仿真时可以看到这一点.

3 自适应递推极点配置算法

设系统(1)或的参数未知式慢时变, 采用如下回归形式表示(1)式

$$y(t) = \theta^T \Psi(t-1), \quad (11)$$

$$\text{其中 } \theta^T = [A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n],$$

$$\Psi(t-1) = [-y^T(t-1), \dots, -y^T(t-n), u^T(t-1), \dots, u^T(t-n)]^T.$$

设 $\hat{\theta}(t)$ 表示 θ 的 t 时刻估计值, 采用如下递推最小二乘法做估计系统参数 $\hat{A}(D), \hat{B}(D)$, 得到

$$\hat{A}y(t) = \hat{B}(D)u(t) + e_a(t), \quad (12)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{Q(t-2)\psi(t-1)}{1 + \Psi^T(t-1)Q(t-2)\Psi(t-1)} [y^T(t) - \Psi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)],$$

$$Q(t-1) = Q(t-2) - \frac{Q(t-2)\Psi(t-1)\Psi^T(t-1)Q(t-2)}{1 + \Psi^T(t-1)Q(t-2)\Psi(t-1)},$$

$$Q(-1) \text{ 为给定正定阵, } \hat{\theta}(0) \text{ 为给定初值.} \quad (13)$$

结合系统辨识算法(13)式和求解控制参数的一步递推算法, 得到如下多变量自适应极点配置的递推算法:

步 1° 利用(13)式估计系统参数 $\hat{A}(D), \hat{B}(D)$, 得到(12)式.

步 2° 用(10)式递推算法求解控制器参数, 得到 $\hat{K}(D), \hat{P}(D)$, 闭环系统为

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{P}(D)A^*(D)^{-1}\hat{B}(D)Ev(t) + \hat{P}_{(D)}A^*(D)^{-1} * e_a(t), \\ u(t) &= (-\hat{K}(D)A(D)^{-1}\hat{B}(D)E + E)v(t) - \hat{K}(D)A^{*-1}(D)e_a(t). \end{aligned} \quad (14)$$

步 3° 为消除稳态误差, 选前馈阵 E 为

$$\hat{E} = (\hat{E}(1)A^*(1)^{-1}\hat{B}(1))^{-1}. \quad (15)$$

步 4° 控制 $u(t)$ 由下式计算

$$u(t) = -\hat{K}(D)\hat{P}(D)^{-1}y(t) + \hat{E}v(t), \text{转到步 } 1^\circ$$

4 算法的收敛性

引理 3 若 $A(D), B(D)$ 是相对左互质, 则一定存在一个正常数 ϵ_θ , 对满足下式任一个 $\hat{\theta}(t)$

$$\|\hat{\theta}(t) - \theta\| < \epsilon_\theta$$

所构成的 $\hat{A}(D), \hat{B}(D)$ 是相对左互质^[5].

引理 3 告诉这样一个事实, 如果 θ 所对应系统矩阵 $A(D), B(D)$ 是相对左互质, 那么一定能找到以 θ 为中心的一个超球域 $S_\theta \triangleq \{\hat{\theta}(t) : \|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq \epsilon_\theta\}$, 使得其中每个元素对应的系统阵 $\hat{A}(D), \hat{B}(D)$ 也是相对左互质. 在估计算法(13)式引入投影变换, 以保证每步辨识出参数 $\hat{\theta}(t) \in S_\theta$ ^[3].

定理 2 (局部收敛性) 在系统参数辨识算法(13)中引入上面所述投影变换, 则本文提出的递推多变量自适应极点配置算法是具有如下性质:

- a) 对所有 $t \geq 0, \{y(t)\}, \{u(t)\}$ 均有界;
- b) 输出渐近跟踪参考输入, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - v(t)] = 0$.

证 由文[3]系统辨识的投影修正算法具有如下性质:

- i) $\|\hat{\theta}(t)\|$ 有界, 且 $\hat{\theta}(t) \in S_\theta$;
- ii) $\|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-j)\| \in l^2$, 对任意有限正整数, $j < +\infty$;
- iii) $\frac{e_a^T(t)e_a(t)}{1 + k\Psi^T(t-1)\Psi(t-1)} \in l^2, (e_a(t) = y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\Psi(t-1))$.

由 $\hat{\theta}(t)$ 的有界性及(10)式知道 $W(t)$ 也是有界的, 而且 $W(t)$ 是 $\hat{\theta}(t-1)$ 的连续函数, 也是 $W(t-1)$ 的线性函数, 且闭环系统(14)式是渐近指数稳定的, 因此文[1]稳定性结果推广到多变量情形时条件 E1 ~ E3 和 A1 ~ A4, 本文的算法均满足, 则有:

- a) $\{y(t)\}, \{u(t)\}$ 对所有 $t \geq 0$ 均有界;
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{P}(D)A^*(D)^{-1}\hat{B}(D)Ev(t) + \hat{P}(D)A^*(D)^{-1}e_a(t))$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}(1)A^*(1)^{-1}\hat{B}(1)Ev(t).$

的 E 的选择(15)得结论 b). 证毕.

5 仿真实验

例 考虑下面多变量系统

$$y(t) = -A_1y(t-1) + B_1u(t-1) + B_2u(t-2).$$

其中 $A_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 4 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

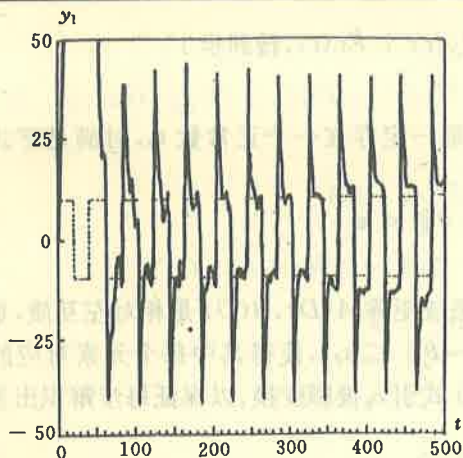
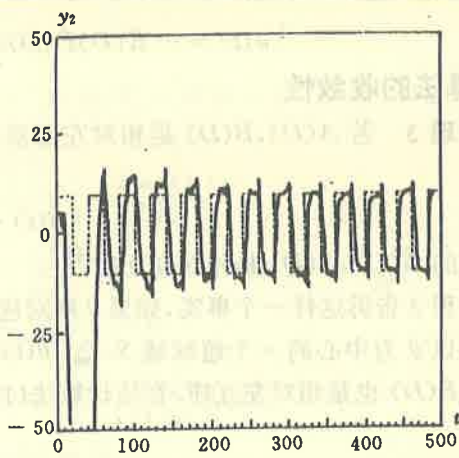
选择 $A^*(D) = \begin{bmatrix} 1-0.5D & 0 \\ 0 & 1-0.5D \end{bmatrix}, v(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T.$

$v_1(t), v_2(t)$ 都选为周期为 40, 幅值为 ± 10 的方波信号, 采用本文一步迭代算法, 仿真结果如图 1, 图 2. 由此看出在开始跟踪误差较大, 这与前面我们的预计相符, 最后跟踪情况基本上满足要求.

6 结 论

本文提出的递推的多变量自适应极点配置算法具有如下特点:

- ① 由于控制器的计算采用迭代算法, 在线计算量大幅度减少;
- ② 局部收敛性得到证明;

图 1 输出 $y_1(t)$ 跟踪方波信号图 2 输出 $y_2(t)$ 跟踪方波信号

③能跟踪有界输出.

参 考 文 献

- 1 Zhang, C. and Evans, R. . A stable iterative adaptive corotrot. IEEE Trans. Automat. Contr. ,1990,AC-35(1):88—92
- 2 Elliott H. and Wolovich, W. A. . Panameterization issles in multivariable adaptive control. Automatica, 1984, 20(5): 533—539
- 3 Goodwin, G. C. and Sin K. . Adaptive filtering prediction and control. Prentce-Hall Inc, 1984
- 4 Wolovich, W. A. . Linear multivariable systems. springer verlag, New York, 1974
- 5 张纪锋, 陈翰馥. 用确定性激励设计的适应控制. 控制理论与应用, 1993, 10(2): 182—185
- 6 Ф. П. 甘特马赫尔. 矩阵论. 北京: 高等教育出版社, 1955
- 7 李俊民, 刑科义, 万百五. 递推自适应极点配置算法. 控制理论与应用, 1996, 13(1): 253—258

Recursive Multivariable Adaptive Pole Placement Algorithm

LI Junmin and WAN Baiwu

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University • Xi'an, 710049, PRC)

GAO Shuping and XING Keyi

(Department of Applied Mathematics, Xidian University • Xi'an, 710071, PRC)

Abstract: A two-layers recursive multivariable adaptive pole placement algorithm with a process of iterative computing controller's parameters is presented. The on-Line computation cost of the algorithm is greatly reduced. The proof of the stability and the convergence of the algorithm are respectively established. The algorithm with the feedforward can arbitrarily follow a bounded output. Simulation example shows the efficiency of the algorithm.

Key words: recursive pole placement algorithm; multivariable system; local convergence and stability

本文作者简介

李俊民 1965年生. 1990年毕业于西安电子科技大学, 获硕士学位, 现为西安交通大学博士生. 研究方向有自适应控制, 大系统智能控制和动态系统优化控制.

万百五 1928年生,教授,博士生导师.1951年上海交通大学电信研究所研究生毕业.现在西安交通大学系统所大系统室,主要研究方向为大系统模型简化、大系统优化递阶控制、大系统智能控制等,国内外发表论文180余篇,曾获国家教委科技进步奖一次、二等奖两次.

高淑萍 1963年生.1995年毕业于西安电子科技大学,获硕士学位,讲师.研究方向为鲁棒自适应控制理论.

邢科义 1957年生.1994年获西安交通大学工学博士学位,现为西安电子科技大学副教授.研究方向有离散事件动态系统, Petri 网理论与应用,智能控制理论与应用.

清华大学“模糊系统、神经网络及遗传算法”高级研讨班 招 生 简 章

根据国家教委教人司[1995]83号文件精神,为了促进新一代学术骨干和学科带头人的成长,顺利实现高校骨干教师队伍的新老交替,经国家教委批准,我校将举办“模糊系统、神经网络及遗传算法”高级研讨班.本班通过学习、研讨和交流,加深了解和进一步掌握这一新兴领域的学术前沿动态、拓宽知识面,进一步提高学术水平,达到加速培养学科带头人的目的.研讨班由博士生导师孙增圻教授主持,将邀请学术造诣深的国内外专家、教授进行讲座并与大家共同研讨.

一、招生对象

高校学术带头人的后备力量或学科骨干,即在人工智能、智能控制、智能信息处理及智能自动化等领域取得一定成就的教学和科研人员,一般为具有高级职称的中青年教师或具有讲师职称的优秀博士生、硕士生,同时也欢迎其它机构的相当人员参加研讨班,以增进学术交流.

二、研讨内容

1. 计算智能技术概论 2. 模糊逻辑基础 3. 模糊系统分析和设计 4. 模糊系统自适应控制 5. 多层前馈神经网络 6. 反馈神经网络 7. 局部逼近神经网络 8. 模糊神经网络 9. 神经网络在系统建模及控制中的应用 10. 遗传算法及其应用.

三、办班时间

1997年10月26日至11月8日.10月20—24日在北京将举办一个由我们参与组织的首届IEEE智能处理系统国际会议,有兴趣者可提前报到参加或旁听该会议.

四、费用

学费及资料费400元,住宿费、伙食及交通费自理.

五、报名

1997年8月10日前将高级研讨班报名表寄到清华大学继续教育学院.如有在研讨班上进行交流的论文请将题目和摘要一起寄来.

1997年9月10日前由清华大学继续教育学院发出同意参加研讨班的通知和有关注意事项.

联系人: 王爱梅 清华大学继续教育学院 100084 电话: 10—62782411(O)

联系人: 钱宗华 清华大学计算机系 100084 电话: 10—62782266(O), 10—62784458(H)

如有需要,可向联系人索要报名表.

清华大学继续教育学院
智能技术与系统国家重点实验室
一九九七年三月