

离散系统状态反馈控制中的跟踪问题

蒋国平 宋文忠

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 针对离散系统, 本文讨论状态调节器的输出跟踪问题, 指出了现有的离散状态调节器存在的问题, 提出了一种新型的离散状态 PI 调节器。

关键词: 离散系统; 最优输出跟踪; 离散状态 PI 调节器

1 引言

针对连续系统, 文[1, 2]研究了状态调节器的输出跟踪问题; 将文[1, 2]的结果推广到离散系统, 得到离散系统的状态调节器^[3]。文[1~3]的状态调节器在结构上存在问题。针对上述文献存在的问题, 基于离散系统, 本文提出一种新型的状态调节器——离散状态 PI 调节器, 进而分析了文[1~3]存在的问题, 并对本文的离散状态 PI 调节器与文[3]的调节器的控制效果进行了分析和比较。

2 问题的提法

设被控对象状态方程

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为对象的状态, $u(k), y(k) \in \mathbb{R}$ 分别为对象控制输入和输出, (A, B, C) 为具有相应尺度的三矩阵组, 且 (A, B) 可控, (A, C) 可观。

控制的目的是要寻求控制律 $u(k)$, 使得控制对象的输出 $y(k)$ 以某种最优方式跟踪输出给定值 y_s 。

3 离散状态 PI 调节器

式(1)即为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k+1) = Cx(k+1). \end{cases} \quad (2)$$

即

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k+1) = CAx(k) + CBu(k). \end{cases} \quad (3)$$

将上式改写成相对于稳态值的增量形式

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k), \\ \bar{y}(k+1) = CA\bar{x}(k) + CB\bar{u}(k). \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\bar{x}(k) = x(k) - x_s$, $\bar{y}(k) = y(k) - y_s$, $\bar{u}(k) = u(k) - u_s$, x_s 和 u_s 为与 y_s 相对应的系统状态稳态值和控制输入稳态值。

对式(4)进行适当变换, 得

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k), \\ \bar{y}(k+1) + \left(\sum_{i=1}^k \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} \right) = CA\bar{x}(k) + CB\bar{u}(k) + \left(\sum_{i=1}^k \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} \right). \end{cases} \quad (5)$$

整理得

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k), \\ \sum_{i=1}^{k+1} \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} = CA\bar{x}(k) + CB\bar{u}(k) + \left(\sum_{i=1}^k \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} \right). \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\bar{y}(i) = y(i) - y_s, i = 1, \dots, k+1$.

将式(6)写成如下形式

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(k+1) \\ \sum_{i=1}^{k+1} \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \sum_{i=1}^k \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \bar{u}(k). \quad (7)$$

令

$$\bar{z}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{y}(i) - \frac{u_s}{k_2},$$

则式(7)为

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(k+1) \\ \bar{z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \bar{u}(k). \quad (8)$$

取二次型性能指标

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix} + \bar{u}(k)^T R \bar{u}(k) \right\}. \quad (9)$$

其中 $Q = H^T H \geq 0, R > 0$, 且 $(\bar{A}, H)$ 可观. $\bar{A}$ 的定义如下:

$$\text{设} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix}.$$

设 $(\bar{A}, \bar{B})$ 可控, 则由离散系统规范型状态调节器理论可得

$$\bar{u}(k) = K \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix} = K_1 \bar{x}(k) + k_2 \bar{z}(k)$$

$$= K_1(x(k) - x_s) + k_2 \sum_{i=1}^k (y(i) - y_s) - u_s.$$

因此, 可得

$$u(k) = K_1(x(k) - x_s) + k_2 \sum_{i=1}^k (y(i) - y_s). \quad (10)$$

式中 $K = [K_1 \quad k_2]$ 为下列离散 Riccati 方程的解

$$\begin{cases} \bar{A}^T P \bar{A} - P - \bar{A}^T P \bar{B} (R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q = 0, \\ K = (R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}. \end{cases} \quad (11)$$

实际的控制系统一般只给出输出给定值, 这就要求我们设法由 y , 估计 x_s . 当系统处于稳态时, 由式(1)可得

$$\begin{cases} Ax_s + Bu_s = x_s, \\ Cx_s = y_s. \end{cases} \quad (12)$$

令

$$M = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

当矩阵 M 可逆时, 可得

$$\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y_s \end{bmatrix}. \quad (13)$$

令 $F = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T$ 为 M^{-1} 的最右一个列向量前 n 个元, 可得

$$\bar{x}_s = F \cdot y_s = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T y_s. \quad (14)$$

将式(14)代入式(10), 得

$$\begin{aligned}
 u(k) &= K_1(x(k) - Fy_s) + k_2 \sum_{i=1}^k (y(i) - y_s) \\
 &= K_1 F \left(\frac{K_1}{K_1 F} x(k) - y_s \right) + \frac{k_2}{K_1 F} \sum_{i=1}^k (y(i) - y_s) \\
 &= \frac{1}{\delta} \left[(D^T x(k) - y_s) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^k (y(i) - y_s) \right].
 \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\delta = 1/K_1 F$, $D^T = K_1 \delta$, $T_i = 1/k_2 \delta$.

在推导式(15)过程中,用到了 $(\bar{A}, \bar{B})$ 可控条件,下述定理揭示了该条件与原对象的联系.

定理 1 若 (A, B) 可控,则有如下结论

$(\bar{A}, \bar{B})$ 可控 $\Leftrightarrow$ 矩阵 M 可逆.

定理 2 当被控对象的 Z 域传递函数不含有位于单位园上的零点时, M 可逆.

证明从略.

4 对现有结果的分析

文[3]提出的控制律为

$$u(k) = K_1 x(k) + k_2 \sum_{i=1}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 x(0)). \quad (16)$$

其中 $u(0), x(0)$ 分别为控制输入及对象状态的初值, $[K_1 \quad k_2]$ 为控制参数.

式(16)所示的控制律存在严重缺陷,即没有考虑状态稳态值 x_s 的影响. 为了说明式(16)的问题,我们举例说明.

例 1 设被控对象为一阶积分环节,对应的离散状态方程为

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + Tu(k), \\ y(k) = x(k). \end{cases} \quad (17)$$

式中 T 为采样周期.

此时,式(16)即为

$$u(k) = K_1 y(k) + k_2 \sum_{i=0}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 y(0)). \quad (18)$$

显然,式(18)的控制律存在问题,正确的离散 PI 调节器^[4]应为

$$u(k) = K_1 (y_s - y(k)) + k_2 \sum_{i=0}^{k-1} (y_s - y(i)). \quad (19)$$

将上式写成离散状态 PI 调节器形式,即为

$$u(k) = K_1 (x_s - x(k)) + k_2 \sum_{i=0}^{k-1} (y_s - y(i)). \quad (20)$$

例 2 设被控对象为二阶积分环节,对应的离散状态方程为

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = [1 \quad 0] \bar{x}(k). \end{cases} \quad (21)$$

此时,式(16)即为

$$\begin{aligned}
 u(k) &= K_1 x(k) + k_2 \sum_{i=1}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 x(0)) \\
 &= K_1 \left[\frac{y(k)}{T} \right] + k_2 \sum_{i=1}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 x(0))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= k_{11}y(k) + \frac{k_{12}}{T}(y(k) - y(k-1)) + k_2 \sum_{i=0}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 x(0)) \\
 &= k_{11}y(k) + k_{12}'(\bar{y}(k) - \bar{y}(k-1)) + k_2 \sum_{i=0}^{k-1} (y_s - y(i)) + (u(0) - K_1 x(0)).
 \end{aligned}$$

其中 $K_1 = [k_{11} \quad k_{12}']$, $k_{12}' = \frac{k_{12}}{T}$.

显然, 上式也存在问题, 正确的离散 PID 调节器^[4]应为

$$u(k) = k_{11}(y_s - y(k)) + k_{12}'(\bar{y}(k) - \bar{y}(k-1)) + k_2 \sum_{i=1}^k (y_s - y(i)). \quad (22)$$

将式(22)写成离散状态 PI 调节器形式, 即为

$$u(k) = K_1'(x_s - x(k)) + k_2 \sum_{i=1}^k (y_s - y(i)). \quad (23)$$

其中 $K_1' = [k_{11} \quad k_{12}']$.

式(23)中, 当 y_s 变化时, x_s 也跟着变化, 不能在公式中任意假设 $x_s = 0$, 或者忽略 x_s , 而是要象上节那样, 设法从 y_s 中估计出 x_s .

5 仿 真

下面通过一个例子对本文离散状态 PI 调节器与[3]的状态调节器的控制效果进行比较.

设被控对象的状态方程为

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & & & & \\ & 0.9 & 0.1 & & & \\ & & 0.9 & 0.1 & & \\ & & & 0.9 & 0.1 & \\ & & & & 0.9 & 0.1 \\ & & & & & 0.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k), \\
 y(k) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x(k).
 \end{aligned}$$

选取加权阵

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0.01 \end{bmatrix}, \quad R = 20.$$

可以求得离散状态 PI 调节器的最优控制参数

$$K = [-0.2212, -0.2193, -0.2147, -0.2064, -0.1943, -0.1789, -0.0222].$$

系统的响应曲线示于图 1, 2. 图 1(a), (b) 分别表示对象跟踪给定值的输出响应曲线和控制输入曲线, 其中 u_1, y_1 为用本文的离散状态 PI 调节器的响应曲线, u_2, y_2 为用文[3]的状态调节器(式(16))的响应曲线. 从图 1 可见, 文[3]的调节器的跟踪性能较差, 主要表现在系统的响应速度较慢, 调节时间较长, 原因在于式(16)中的 $K_1 x(k)$ 项, 应为 $K_1(x_s - x(k))$. 图 2(a), (b) 分别表示对象输入端发生阶跃扰动($V = 0.2$)时的系统输出和控制输入曲线, 系统的初态为 $y(0) = 1$, u_1, y_1, u_2, y_2 的含义同上. 从图 2 可见, 式(16)克服输入端外部扰动的能力较差, 表现在系统调节时间较长, 且系统输出 $y(k)$ 在趋于平衡态($y_s = 1$)时有振荡, 原因在于式

(16) 中 $K_1 x(k)$ 项, 其状态偏差为 $0 - x(k)$, 而实际上应该为 $x_s - x(k)$, 这就要求积分部分 $k_2 \sum_{i=1}^{k-1} (y_s - y(i))$ 来进行补偿, 从而引起输出 $y(k)$ 的振荡.

6 结 论

本文提出的离散状态 PI 调节器克服了现有离散状态调节器的缺点, 其跟踪性能优于现有的离散状态调节器. 因此, 离散状态 PI 调节器可在计算机控制中推广应用.

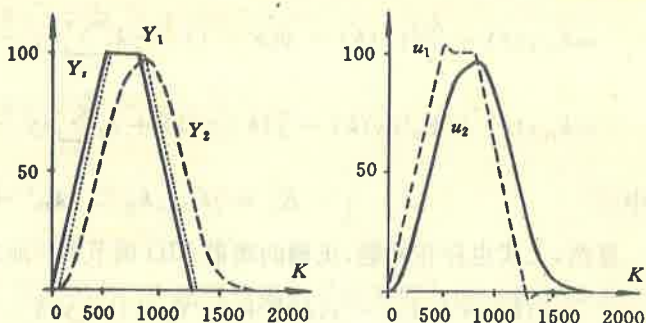


图 1 对象跟踪给定值的系统响应曲线

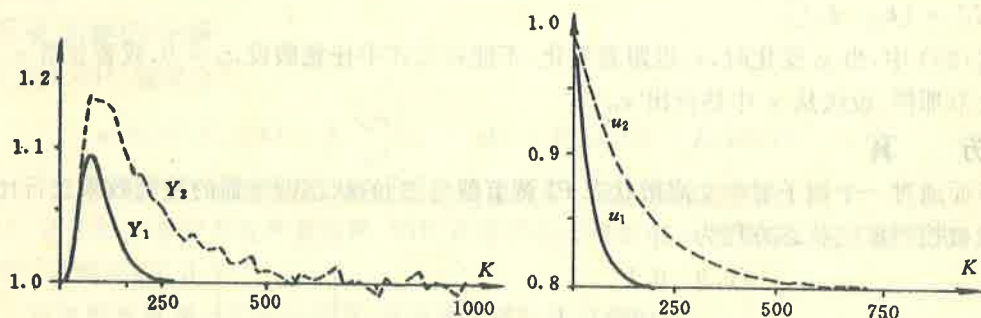


图 2 对象输入端发生阶跃扰动时的响应曲线

参 考 文 献

- 1 Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. . Linear optimal control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971, 247—271
- 2 Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. . Optimal control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989, 273—276
- 3 邢继祥, 黄亚峰, 李铁才. PI 调节器用于离散系统跟踪问题的最优设计. 自动化学报, 1990, 16(6): 551—554
- 4 王永初. 自动调节系统工程设计. 北京: 机械工业出版社, 1983, 226—231

On the Tracking Problems for Discrete State Feedback Systems

JIANG Guoping and SONG Wenzhong

(Automation Research Institute, Southeast University • Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: In this paper, the tracking problems for discrete systems with state regulator are discussed. The disadvantages of current discrete state regulators are pointed out, and a new kind of discrete state PI regulator is presented in the paper.

Key words: discrete systems; optimal output tracking; discrete state PI regulator

本文作者简介

蒋国平 1966年生. 1988年毕业于河海大学电力系, 获工学学士学位, 并留校任教. 1992年考入东南大学自动化所攻读硕士学位, 1994年提前攻读博士学位. 目前主要研究方向是状态反馈控制和鲁棒控制.

宋文忠 见本刊1997年第1期第121页.