多变量 Lurie 泛函型方程控制系统的绝对稳定性

赵峥嵘　　赵素霞
(大连轻工学院数学教研室·大连, 116034)　(辽宁师范大学数学系·大连, 116022)

摘要: 本文利用 Lyapunov 泛函, 对多变量的 Lurie 泛函型方程的控制系统给出了绝对稳定性的充分条件, 把对一个变量的某些结果推广到了多变量.

关键词: 泛函方程; 绝对稳定性; Lyapunov 泛函

1 引　言

本文研究带有泛函型方程的多变量的直接控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g(x, x_t) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \phi_j(\sigma_j), \\ \sigma_j = c_j^{\mathrm{T}} x \end{cases} \tag{1.1}$$

的绝对稳定性. 这里 $x, b_j, c_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 是 n 维向量, $c_j \neq 0$, $\rho_j = -c_j^{\mathrm{T}} b_j \geqslant 0$, $g(t, \psi)$ 是 $[0, +\infty) \times c_n[-\bar{r}, 0]$ 上定义的 n 维向量连续泛函, $\bar{r} > 0$, $g(t, 0) = 0$, 其中 $c_n[-\bar{r}, 0]$ 是在 $[-\bar{r}, 0]$ 上定义的 n 维向量连续函数的空间, 以 $|\psi(t)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i^2(t)}$ 表示 n 维向量的模, 而 $\|\psi(t)\| = \sup\limits_{t \in [-\bar{r}, 0]} |\psi(t)|$, $\psi \in c_n[-\bar{r}, 0]$ 为 $c_n[-\bar{r}, 0]$ 中的模. $g(t, \psi)$ 对 ψ 又满足带有常数 L 的 Lipschitz 条件, 即对 $\psi_1, \psi_2 \in c_n[-\bar{r}, 0]$ 有

$$|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)| \leqslant L \|\psi_1 - \psi_2\|. \tag{1.2}$$

又置 $x_t \in c_n[-\bar{r}, 0]$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\bar{r} \leqslant \theta \leqslant 0$, 设 $\phi_j(\sigma_j)$ 是纯量函数, 它满足

$$\phi_j(0) = 0, \quad 0 \leqslant \phi_j(\sigma_j)\sigma_j \leqslant k_j \sigma_j^2, \quad k_j > 0 (j = 1, 2, \cdots, m). \tag{1.3}$$

在文[1]中, 讨论了单变量(即 $m = 1$) Lurie 泛函型方程的直接控制系统的绝对稳定性. 在文[2]中指出了文[1]在定理 2 中给出的判据(ii)及在定理 4 中给出的判据(ii)都是不能实现的. 在文[3]中给出了直接从存在满足两个不等式的实数 β 来判别的充分条件, 在与文[1]中定理 2 的判据(i)及定理 4 的判据(i)的比较中, 作者认为结果是互不包含的. 在文[4]中讨论并建立了更为直接地判别不等式型的充分条件, 它包含了文[2]中定理 2 的判据(i), 但对于多变量的系统无相应的结果. 美国 SIAM 组织的专门小组 1988 年的研究报告:《控制理论的未来方向——数学展望》中指出: 虽然非线性控制系统的稳定性是一个受到重视的研究领域, 也出现了很多数学成果, 但都只是涉及一个变量的非线性控制系统的结果. 例如 Popov 准则, Lyapunov 方法等. 而对于多变量的非线性控制系统作出相应的结果还是没有得到解决的问题. 由此可见, 由单变量系统推广到多变量系统是很困难的.

本文对系统(1.1)采取形如

$$W(t, \psi) = \frac{1}{2} V^2(t, \psi) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^{c_j^{\mathrm{T}} \psi(0)} \phi_j(s) ds \tag{1.4}$$

本文于 1994 年 11 月 18 日收到. 1997 年 1 月 9 日收到修改稿.

的李雅普诺夫泛函，其中 $V(t,\psi)$ 是满足某些性质的，由(1.1)的相方程

$$\frac{dx}{dt}=g(t,x_t) \tag{1.5}$$

所决定的李雅普诺夫泛函，利用文[5]的端线控制法，本文对于多变量的控制系统给出了判断绝对稳定性的充分条件，并将[3]、[4]中的结果推广到多变量的情况.

2 主要结果

设相方程(1.5)的解满足

$$|x(t,t_0,\psi|\leqslant De^{-\alpha(t-t_0)}\|\psi\|. \tag{2.1}$$

由[6]中引理 2.1，则对方程(1.5)，(2.1)及任意的 $q\in(0,1)$，存在泛函 $V(t,\psi)$，它对所有 $t\geqslant 0$ 及 $\psi\in c_n[-\bar{r},0]$ 是连续的，且满足

$$\|\psi\|\leqslant V(t,\psi)\leqslant D\|\psi\|, \tag{2.2a}$$

$$|V(t,\psi_1)-V(t,\psi_2)|\leqslant M\|\psi_1-\psi_2\|, \tag{2.2b}$$

$$\dot{V}(t,\psi)|_{(1,5)}\leqslant -r^2V(t,\psi). \tag{2.2c}$$

其中

$$r^2=(1-q)\alpha,\quad M=D^{[L+(1-q)\alpha]/q\alpha}. \tag{2.3}$$

对于系统(1.1)，取李雅普诺夫泛函

$$W(t,\psi)=\frac{1}{2}V^2(t,\psi)+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\int_0^{c_i^{T}\psi(0)}\phi_i(s)ds$$

有

$$\begin{aligned}&[\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}(1-\operatorname{sgn}\beta_i)\frac{1}{4}\beta_ik_i|c_i|^2]\|\psi\|^2\\&\leqslant w(t,\psi)\\&\leqslant[\frac{D^2}{2}+\sum_{i=1}^{m}(1+\operatorname{sgn}\beta_i)\frac{1}{2}\beta_ik_i|c_i|^2]\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

设当 $\beta_i<0$ 时，$1+\beta_ik_i|c_i|^2>0$.

由给定条件知，$W(t,\psi)$ 满足具有无穷小上界与无穷大下界条件，并且有

$$\begin{aligned}\dot{W}(t,\psi)&=V(t,\psi)V_\psi\cdot\psi'+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\phi_i(\sigma_i)c_i^{T}[g(t,x_t)+\sum_{j=1}^{m}b_j\phi_j(\sigma_j)]\\&\leqslant -r^2V^2+MV(\sum_{i=1}^{m}|b_i||\phi_i(\sigma_i)|)\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}[|\beta_i|L|c_i|V|\phi_j(\sigma_j)|+\sum_{j=1}^{m}\beta_ic_i^{T}b_j\phi_j(\sigma_j)\phi_i(\sigma_i)]\\&\leqslant -r^2V^2+\sum_{i=1}^{m}[MV|b_i||\phi_i(\sigma_i)|+|\beta_i|L|c_i|V|\phi_i(\sigma_i)|\\&\quad+\beta_ic_i^{T}b_i\phi_i^2(\sigma_i)+\sum_{i\neq j}|\beta_ic_i^{T}b_j||\phi_i(\sigma_i)\phi_j(\sigma_j)|]\\&=-V^2[r^2-\sum_{i=1}^{m}(M|b_i\frac{|\phi_i(\sigma_i)|}{V}+|\beta_i||c_i|L\cdot\frac{|\phi_i(\sigma_i)|}{V}\\&\quad+\beta_ic_i^{T}b_i(\frac{\phi_i(\sigma_i)}{V})^2+\sum_{i\neq j}|\beta_ic_i^{T}b_j|\frac{|\phi_i(\sigma_i)|}{V}\cdot\frac{|\phi_j(\sigma_j)|}{V})].\end{aligned}$$

由(1.3)及已知其它条件显然有

$$\frac{V(t,x_t)}{|\phi_i(\sigma_i)|}\geqslant\frac{\|x_t\|}{|\phi_i(\sigma_i)|}\geqslant\frac{\|x_t\|}{k_i|c_i|\|x_t\|}=\frac{1}{k_i|c_i|}$$

成立，且$\frac{|\phi_i(\sigma_i)|}{V}$的值在$[0,k_i|c_i|]$中，为方便计，以$\xi_i$记之，即$|\phi_i(\sigma_i)|=\xi_i V$，这里$\xi_i$不是一个常数且$\xi_i\in[0,k_i|c_i|]$. 则有

$$\dot W(t,\psi)\leqslant -V^2[r^2-\sum_{i=1}^m(M|b_i|\xi_i+|\beta_i|L|c_i|\xi_i+\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i^2 + \sum_{i\neq j}|\beta_i c_i^{\mathrm T}b_j|\xi_i\xi_j)].$$

记
$$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=r^2-\sum_{i=1}^m(M|b_i|\xi_i+|\beta_i|L|c_i|\xi_i+\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i^2 + \sum_{i\neq j}|\beta_i c_i^{\mathrm T}b_j|\xi_i\xi_j).$$

我们有下面的结果：

引理1 若存在$\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$使$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)>0$对于任意$\xi_i\in[0,k_i|c_i|]$成立，则系统(1.1)在角$[0,k_i]$绝对稳定.

证 注意到$0\leqslant|\phi_i(\sigma_i)|\leqslant k_i|c_i|V$，取$\min F=\delta>0$，很容易证得$\dot W\leqslant -V^2F\leqslant -\delta^2V$，于是结论成立.

由引理1知，要判定系统绝对稳定，需要验证无穷多个不等式成立，不便于应用. 以下用端线控制法，简化成验证有限个不等式成立.

定理1 若存在β_i，使当$\alpha_i\in\{0,k_i|c_i|\}$时，都有$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\xi_s,0,\cdots,0)>0,(s=1,2,\cdots,m)$. 则$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)>0,\xi_i\in[0,k_i|c_i|].(i=1,2,\cdots,m)$

为了证明这个定理，我们首先给出引理. 记

$$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=\alpha_i\xi_i^2+\eta_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_m)\xi_i + \gamma_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_m).$$

并记$\Delta_i=\eta_i^2-4\alpha_i\gamma_i$，$\Delta_i,\eta_i,\gamma_i$均为关于$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_m$的函数，且$\xi_i\in[0,k_i|c_i|](i=1,2,\cdots,m)$.

引理2 $\Delta_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_m)|_{\xi_j=0\quad j\neq i}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$

证 事实上
$$\Delta_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_m)|_{\xi_j=0,j\neq i} = (M|b_i|+|\beta_i|L|c_i|)^2+4r^2\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i.$$

若$\beta_i\leqslant 0$，则$(M|b_i|+|\beta_i|L|c_i|)^2+4r^2\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\geqslant 0$显然成立.

若$\beta_i>0$，反证假设$(M|b_i|+|\beta_i|L|c_i|)^2+4r^2\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i<0$，则对于系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm dx}{\mathrm dt}=g(t,x_t)+b_i\xi_i,\\[2mm] \dfrac{\mathrm d\xi_i}{\mathrm dt}=c_i^{\mathrm T}g(t,x_t)+c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i,\quad \dfrac{\mathrm d\xi_i}{\mathrm dt}=c_i^{\mathrm T}\dfrac{\mathrm dx}{\mathrm dt}.\end{cases}\tag{2.4}$$

取$W=\frac12V^2+\frac12\beta_i\xi_i^2$，它是$x,\xi_i$的正定函数，并且有

$$\begin{aligned}\dot W&=\beta_i\xi_i[c_i^{\mathrm T}g(t,x_t)+c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i]+V\dot V_*\\&\leqslant -r^2V^2+MV|b_i||\xi_i|+|\beta_i|L|c_i||\xi_i|\,\|x_t\|+\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i^2\\&\leqslant -r^2V^2+MV|b_i||\xi_i|+|\beta_i|L|c_i|V|\xi_i|+\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i^2\\&=-[r^2V^2-(M|b_i|+|\beta_i|L|c_i|)V|\xi_i|-\beta_i c_i^{\mathrm T}b_i\xi_i^2]\\&\leqslant -\varepsilon(V^2+\xi_i^2).\end{aligned}$$

故 W 关于 x, ξ_i 是负定的. 因此, 系统(2,4)渐近稳定. 但由 $\dot{\xi}_i = c_i^{\mathrm{T}}\dot{x}$ 可得 $\xi_i = c_i^{\mathrm{T}}x + k$, k 为常数, 故系统(2,4)不是渐近稳定的, 产生矛盾. 故引理 2 得证.

引理 3 若 1) $\Delta_i(\bar{\xi}_i, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) \geqslant 0$,

2) $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$,

3) $\Delta_s(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) \geqslant 0$.

则 $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$

证

$$\begin{aligned}&\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0)\\ &= \eta_i^2(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0)\\ &\quad + 4\beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_i F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0).\end{aligned}$$

当 $\beta_i \leqslant 0$ 时, 由条件(2)知, 结论成立.

当 $\beta_i > 0$ 时, 记 $\Delta_i(\bar{\xi}_i, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) = A\xi_s^2 + B\xi + c$.

其中

$$\begin{aligned}B &= 2(\mid \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_s \mid + \mid \beta_s c_s^{\mathrm{T}} b_i \mid)[M \mid b_i \mid + \mid \beta_i \mid L \mid c_i \mid + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s-1}(\mid \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_j \mid + \mid \beta_j c_j^{\mathrm{T}} b_i \mid \xi_j]\\ &\quad - 4\beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_i (M \mid b_s \mid + \mid \beta_s \mid L \mid c_s \mid + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s-1}(\mid \beta_s c_s^{\mathrm{T}} b_j \mid \xi_j),\end{aligned}$$

则 $c = \Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) \geqslant 0$, 且由 $\beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_i < 0$ 知 $B > 0$, 则

若 $A \geqslant 0$, $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$.

若 $A < 0$, 由(3)知存在 $\mu_s > 0$, 使得

$$F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \mu_s, 0, \cdots, 0) = 0,$$

故有 $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \mu_s, 0, \cdots, 0) > 0$, 由 $A < 0, B, C > 0$ 及条件(1)有 $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_s \in [0, \mu_s]$ 因为 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, k_s \mid c_s \mid, 0, \cdots, 0) > 0$, 所以 $k_s \mid c_s \mid < \mu_s$, 故有 $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_s \in [0, k_s, \mid c_s \mid]$.

引理 4 若 1) $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \alpha_i, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$,

2) $F(\bar{\xi}_i, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \xi_i, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_i \in [0, k_i \mid c_i \mid]$

3) $\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$.

则 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \xi_i, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_i \in [0, k_i \mid c_i \mid], \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$.

证 若不然假设存在 $\bar{\xi}_i \in [0, k_i \mid c_i \mid], \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$ 使得 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_i, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0) \leqslant 0$, 因为 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) > 0$. 故存在 $\bar{\xi}_s \in [0, \xi_s]$, 使得 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \bar{\xi}_s, 0, \cdots, 0) = 0$. 记

$$\begin{aligned}F(\xi_1, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0) &= \alpha_i \xi_i^2 + \eta_i(\xi_1, \cdots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0)\xi_i\\ &\quad + \gamma_i(\xi_1, \cdots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0).\end{aligned}$$

$$\text{则 } \bar{\xi}_i = \frac{-\eta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \bar{\xi}_s, 0, \cdots, 0) \pm \sqrt{\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_s, 0, \cdots, 0)}}{2\alpha_i}$$

不失一般性, 考虑函数

$$\xi_i = \frac{-\eta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0) + \sqrt{\Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_s, 0, \cdots, 0)}}{2\alpha_i}$$

$$= g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0).$$

当 $\xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$ 时，$\Delta_1(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \alpha_i \neq 0$. 且 $\eta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0), \Delta_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0)$ 都是 ξ_s 的连续函数，因此 $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \xi_s, 0, \cdots, 0)$ 当 $\xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$ 时是 ξ_s 的连续函数，g_i 的情况共有三种：

a) $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) < 0$ 时，由 $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \bar{\bar{\xi}}_s, 0, \cdots, 0) = \bar{\xi}_i > 0$，则存在 $\tilde{\xi}_s \in [0, \bar{\bar{\xi}}_s]$ 使得 $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \tilde{\xi}_s, 0, \cdots, 0) = 0$. 故有 $F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, 0, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \tilde{\xi}_s, 0, \cdots, 0) = 0$，与(1) 矛盾.

b) $0 \leqslant g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) \leqslant k_i \mid c_i \mid$ 时，则有

$$F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0), \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) = 0,$$

与 2)矛盾.

c) $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, 0, \cdots, 0) > k_i \mid c_i \mid$ 时，由 $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \bar{\bar{\xi}}_s, 0, \cdots, 0) = \bar{\xi}_i < k_i \mid c_i \mid$，则存在 $\tilde{\tilde{\xi}}_s [0, \bar{\bar{\xi}}_s]$，使得 $g_i(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \tilde{\tilde{\xi}}_s, 0, \cdots, 0) = k_i \mid c_i \mid$ 故有

$$F(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_{i-1}, k_i \mid c_i \mid, \bar{\xi}_{i+1}, \cdots, \bar{\xi}_{s-1}, \tilde{\tilde{\xi}}_s, 0, \cdots, 0) = 0,$$

与(1)矛盾. 故引理 4 得证.

应用上面几个引理我们来证明定理 1.

证　首先证 $F(\xi_1, \xi_2, 0, \cdots, 0) > 0$，事实上由引理 2 知 $\Delta_1(0, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \Delta_2(0, \cdots, 0) \geqslant 0$，又由已知 $F(\alpha_1, \xi_2, 0, \cdots, 0) > 0$，应用引理 3 可得 $\Delta_1(\xi_2, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \xi_2 \in [0, k_2 \mid c_2 \mid]$. (同理可证 $\Delta_i(0, \cdots, 0, \xi_s, 0, \cdots 0) \geqslant 0, \xi_s \in [0, k_s \mid c_s \mid]$). 又 $F(\xi_1, 0, \cdots, 0) > 0$，应用引理 4，则证得 $F(\xi_1, \xi_2, 0, \cdots, 0) > 0, \xi_1 \in [0, k_1 \mid c_1 \mid], \xi_2 \in [0, k_2 \mid c_2 \mid]$，同理可证

$$F(0, \cdots, 0, \xi_{i_1}, 0, \cdots, 0, \xi_{i_2}, 0, \cdots, 0) > 0$$

及

$$F(\alpha_1, \xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) > 0, \quad i \in \{i_1, i_2, 2, 3\}, \quad \xi_i \in [0, k_i \mid c_i \mid].$$

下面再证 $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) > 0$. 其中 $\xi_i \in [0, k_i \mid c_i \mid], i = 1, 2, 3$. 由 $\Delta_1(\xi_2, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, \Delta_3(0, \xi_2, 0, \cdots, 0) \geqslant 0, F(0, \xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) > 0$ 及引理 3，则 $\Delta_1(\xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) \geqslant 0$，由 $F(\alpha_1, \xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) > 0, F(\xi_1, \xi_2, 0, \cdots, 0) > 0$ 及引理 4，则 $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, \cdots, 0) > 0$. 依此证明类推，即得到 $F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) > 0, \xi_i \in [0, k_i \mid c_i \mid] (i = 1, 2, \cdots, m)$，这样定理 1 得证.

定理 2　若存在实数 β_i，使当 $\alpha_i \in \{0, k_i \mid c_i \mid\}$ 时，

$$r^2 > k_s \mid c_s \mid [M \mid bs \mid + \mid \beta_s \mid L \mid c_s \mid + \beta_s c_s^{\mathrm{T}} b_s k_s \mid c_s \mid + \sum_{i=1}^{s-1} (\mid \beta_s c_s^{\mathrm{T}} b_i \mid + \mid \beta_i^{\mathrm{T}} c_i^{\mathrm{T}} b_s \mid) \alpha_i]$$
$$+ \sum_{i=1}^{s-1} [\alpha_i (M \mid b_i \mid + \mid \beta_i \mid L \mid c_i \mid + \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_i \alpha_i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j < s}} \mid \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_j \mid \alpha_j)], \tag{2.5a}$$

$$r^2 > \frac{1}{2} k_s \mid c_s \mid [M \mid b_s \mid + \mid \beta_s \mid L \mid c_s \mid + \sum_{i=1}^{s-1} (\mid \beta_s c_s^{\mathrm{T}} b_i \mid + \mid \beta_i^{\mathrm{T}} c_i^{\mathrm{T}} b_s \mid) \alpha_i]$$
$$+ \sum_{i=1}^{s-1} [\alpha_i (M \mid b_i \mid + \mid \beta_i \mid L \mid c_i \mid + \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_i \alpha_i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j < s}} \mid \beta_i c_i^{\mathrm{T}} b_j \mid \alpha_j)], \tag{2.5b}$$

$(s = 1, 2, \cdots, m)$ 均成立，则系统(1.1) 绝对稳定.

注 这是将文[3]的结果相应地推广到多变量.

证 因为 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\xi_s,0,\cdots,0)>0$ 的充要条件为(2.5a)(2.5b)成立,故由定理1知,当 β_i 满足(2.5a),(2.5b)时,系统(1.1)绝对稳定.

下面应用定理2,将文[4]中的结果相应地推广到多变量.

记

$$\alpha_i^* = \frac{k_i\mid c_i\mid M\mid b_i\mid}{r^2},\quad \alpha^* = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^*,\quad R = L\mid c_m\mid + \sum_{i=1}^{m-1}\mid c_m^{\mathrm{T}}b_i\mid k_i\mid c_i\mid.$$

定理3 在下述三个条件满足任一条件时,系统(1.1)在 $[0,k_i]$ 上是绝对稳定.

i) $0<\alpha^*<1$.

ii) $\alpha^*=1$,且存在 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使 $(L-k_i\rho_i)\mid c_i\mid+\sum\limits_{j\neq i}\mid c_i^{\mathrm{T}}b_j\mid k_j\mid c_j\mid<0$.

iii) $1<\alpha^*<2-\dfrac{R-\sum\limits_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*(R-k_m\rho_m\mid c_m\mid)}{k_m\rho_m\mid c_m\mid}$ 且 $R-k_m\rho_m\mid c_m\mid<0$.

证 在条件i),ii)成立时, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\geqslant 0$ 的存在性显然. 在条件iii)成立时,由iii)得

$$2-\frac{R-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*(R-k_m\rho_m\mid c_m\mid)}{k_m\rho_m\mid c_m\mid}>1.$$

可推得

$$\sum_{i=1}^{m-1}\alpha^*\frac{R-k_m\rho_m\mid c_m\mid}{k_m\rho_m\mid c_m\mid}>\frac{R}{k_m\mid c_m\mid\rho_m}-1.$$

又 $R-k_m\rho_m\mid c_m\mid<0$,故有 $\sum\limits_{i=1}^{m-1}\alpha^*<1$,且由iii)又有

$$\alpha^*<2+(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*-1)\frac{R}{k_m\rho_m\mid c_m\mid}-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*<2-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*.$$

因此, $2\sum\limits_{i=1}^{m-1}\alpha_i^*+\alpha_m^*<2$,取 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{m-1}=0$,要存在 $\beta_m>0$,只要 $R-k_m\rho_m\mid c_m\mid<0$, 并且

$$\beta_m>\frac{r^2-\sum_{i=1}^{m}k_i\mid c_i\mid M\mid b_i\mid}{k_m\mid c_m\mid(R-k_m\rho_m\mid c_m\mid)}>0,$$

$$0<\beta_m<\frac{2r^2-2\sum_{i=1}^{m-1}k_i\mid c_i\mid M\mid b_i\mid-k_m\mid c_m\mid M\mid b_m\mid}{k_m\mid c_m\mid R}.$$

而由iii有

$$\frac{r^2-\sum_{i=1}^{m}k_i\mid c_i\mid M\mid b_i\mid}{R-k_m\rho_m\mid c_m\mid}<\frac{2r^2-2\sum_{i=1}^{m-1}k_i\mid c_i\mid M\mid b_i\mid-k_m\mid c_m\mid M\mid b_m\mid}{R}$$

成立.故得满足(2.5a),(2.5b)的 $\beta_i\geqslant 0$ 存在,定理3得证.

参考文献

1 Somolinos, A.. Stability of Lurie-type functional equation. J. Diff. Equ., 1977, 26(2): 190-199
2 ZHAO SUXIA. Comment on stability of Lurie-type functional equation. 1981, 39(3):257-258
3 朱思铭, Дурье型非线性控制系统的绝对稳定性. 第三届微分方程会议论文资料, 1980
4 阮炯, Lurie 泛函型方程控制系统的绝对稳定性. 数学年刊, 1983, 4A(1):47-55
5 赵素霞, 多个执行机构的控制系统的绝对稳定性. 中国科学(A辑), 1987, 8(6):785-792
6 Hale, J.K.. Proceeding of the international symposium for nonlinear oscillation, 1963, 2(4):409-426

Absolute Stability of Control Systems of Lurie-Type Functional Equations with Multiple Nonlinear Gains

ZHAO Zhengrong
(Dalian Institute of Light Industry· Dalian, 116034, PRC)
ZHAO Suxia
(Department of mathematics, Liaoning normal University· Dalian, 116022, PRC)

Abstract: In the paper, by using Lyapunov functional, we give some sufficient conditions for absolute stability of control systems and generalize some results from single nonlinear gain to multiple nonlinear gains.

Key word: functional equations; absolute stability; Lyapunov functional

本文作者简介

赵峥嵘 女. 1971年生. 1995年毕业于辽宁师范大学数学系, 获硕士学位. 现在大连轻工学院任教. 目前主要从事高等数学的教学工作和控制系统的绝对稳定性理论的研究工作.

赵素霞 女. 1937年生. 1957年8月毕业于北京师范大学数学系, 现任辽宁师范大学数学系教授, 硕士研究生导师. 目前主要从事微分方程的稳定性理论研究, 特别是控制系统的稳定性理论研究.