第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

不确定噪声下确保控制性能的鲁棒 LQG 调节器

奚宏生

(中国科技大学自动化系·合肥, 230027)

摘要: 本文讨论了一类具有不确定噪声的离散时间随机线性系统的鲁棒 LQG 问题, 文章给出了确保控制性能的不确定噪声协方差矩阵的扰动上界, 以及极小极大鲁棒 LQG 调节器的设计方法. 采用这种调节器不仅能极小化不确定下的最坏性能, 而且也能确保控制性能指标达到给定的自由度内.

关键词: 不确定噪声; 鲁棒 LQG 调节器; 扰动上界

1 引言及预备知识

近几年中, 文献[1,2]针对随机线性系统在已知不确定噪声协方差矩阵扰动上界的条件下, 利用对策论给出了极小极大鲁棒 LQG 闭环调节器的设计方法. 这些结果同时也表明噪声协方差矩阵的扰动会导致控制性能指标偏离理想值. 如何确保 LQG 调节器对控制目标的性能鲁棒性仍是一个有待解决的问题, 本文从鲁棒控制的基本观点出发去探讨这一问题的解决途径.

设具有不确定噪声的离散时间线性系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k^0, \tag{1.1}$$

$$y_k = Cx_k + v_k^0. \tag{1.2}$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}^n, y_k \in \mathbb{R}^m, u_k \in \mathbb{R}^r$. w_k^0 和 v_k^0 分别是零均值且相互独立的 n 和 m 维高斯白噪声序列, 它们的不确定性表现在其协方差矩阵具有如下性质

$$\mathrm{cov}[w_k^0, w_s^0] = W^0\delta_{k,s} = (W + \Delta W)\delta_{k,s}, \quad W \geqslant 0, \quad \Delta W \geqslant 0,$$

$$\mathrm{cov}[v_k^0, v_s^0] = V^0\delta_{k,s} = (V + \Delta V)\delta_{k,s}, \quad V > 0, \quad \Delta V \geqslant 0.$$

其中 $\Delta W = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i W_i, \Delta V = \sum_{j=1}^{M} e_j V_j; \varepsilon_i, i = 1,2,\cdots,N; e_j, j = 1,2,\cdots,M$ 均是非负不确定扰动参数. $W_i, i = 1,2,\cdots,N; V_j, j = 1,2,\cdots,M$ 均是已知非负定对称矩阵, 控制性能指标被定义为

$$J(u_k, W^0, V^0) = \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{x_k^\tau Q x_k + u_k^\tau R u_k\}. \tag{1.3}$$

其中 $Q \geqslant 0, R > 0$ 分别是 $n \times n$ 和 $m \times m$ 阶实对称矩阵. 假设: 1) (A, C) 是能检测的; 2) $(A, W^{\frac{1}{2}})$ 是能稳定的; 3) (A, B) 是能稳定的; 4) $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ 是能检测的.

当 $\Delta W = 0, \Delta V = 0$, 即噪声协方差矩阵不扰动时, 在假设 1)~4) 下, 存在使性能指标(1.3)达到极小的唯一渐近稳定 LQG 闭环调节器

$$u_k = -F\hat{x}_{k,k-1}, \tag{1.4}$$

$$F = (R + B^\tau P_1 B)^{-1}B^\tau P_1 A, \tag{1.5}$$

$$P_1 = A^\tau P_1 A - AP_1B(R + B^\tau P_1 B)^{-1}B^\tau P_1 A + Q, \tag{1.6}$$

本文于 1994 年 10 月 15 日收到. 1996 年 7 月 29 日收到修改稿.

$$\hat{x}_{k+1,k} = A\hat{x}_{k,k-1} + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_{k,k-1}), \tag{1.7}$$

$$K = AP_2C^\tau(V + CP_2C^\tau)^{-1}, \tag{1.8}$$

$$P_2 = AP_2A^\tau - AP_2C^\tau(V + CP_2C^\tau)^{-1}CP_2A^\tau + W. \tag{1.9}$$

当 $\Delta W \neq 0, \Delta V \neq 0$ 时,我们定义 $\tilde{x}^0_{k+1,k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1,k}$,将(1.1),(1.2)和(1.7)代入后,获得

$$\tilde{x}^0_{k+1,k} = (A - K_kC)\tilde{x}^0_{k,k-1} + w^0_k - K_kv^0_k.$$

并且记 $P^0_{2,k+1} = \mathrm{E}\{\tilde{x}^0_{k+1,k}\tilde{x}^{0\tau}_{k+1,k}\}$,则 $P^0_{2,k+1}$ 满足 $P^0_{2,k+1} = (A - K_kC)P^0_{2,k}(A - K_kC)^\tau + K_kV^0K^\tau_k + W^0$.

Sangsuk-Iam[3]和 Luo[2]等已经证明,在假设 1)~4)下,如果当 $\Delta W = 0, \Delta V = 0$ 时,系统存在稳定滤波器和调节器(1.4)~(1.9),则当 $\Delta W \neq 0, \Delta V \neq 0$ 时,系统状态估计误差方差阵 $P^0_{2,k+1}$ 收敛到下述代数 Riccati 方程 $P^0_2 = (A - KC)P^0_2(A - KC)^\tau + KV^0K^\tau + W^0$ 的唯一解,其中 K 为(1.8)式,并且系统的控制性能指标为 $J(u_k, W^0, V^0) = \mathrm{tr}[G\Sigma^0]$,其中

$$\Sigma^0 = \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} x_k \\ \tilde{x}^0_{k,k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^\tau_k & \tilde{x}^{0\tau}_{k,k-1}\end{bmatrix}\right\}, \quad G = \begin{bmatrix} Q + F^\tau RF & -F^\tau RF \\ -F^\tau RF & F^\tau RF\end{bmatrix}.$$

它满足代数 Riccati 方程

$$\Sigma^0 = \bar{A}\Sigma^0\bar{A}^\tau + \pi^0, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - KC\end{bmatrix}, \quad \pi^0 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^0 + KV^0K^\tau\end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

我们记由噪声协方差矩阵扰动引起的控制性能指标对理想值的偏离度为

$$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) = \mathrm{tr}[G\Delta\Sigma]. \tag{1.11}$$

其中,$\Delta\Sigma$ 满足代数 Riccati 方程式[2]

$$\Delta\Sigma = \bar{A}\Delta\Sigma\bar{A}^\tau + \Delta\pi, \quad \Delta\pi = \begin{bmatrix} \Delta W & \Delta W \\ \Delta W & \Delta W + K\Delta VK^\tau\end{bmatrix}; \quad \text{i.e.} \quad \Delta\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty}\bar{A}^i\Delta\pi\bar{A}^{\tau i}. \tag{1.12}$$

2 确保控制性能的扰动上界

首先,我们给出有关控制性能指标偏离度的等价形式.

定理 2.1 具有不确定噪声的线性系统(1.1),(1.2),在假设 1)~4)下,若采用 LQG 调节器(1.4)~(1.9),那么控制性能指标对理想值的偏离度(1.11)可以被转化为下述等价形式

$$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) = \mathrm{tr}[\Delta W(P_1 + X)] + \mathrm{tr}[\Delta VK^\tau XK]. \tag{2.1}$$

其中,K 由(1.8)给出,X 是代数 Riccati 方程

$$X = (A - KC)^\tau X(A - KC) + F^\tau(R + B^\tau P_1B)F \tag{2.2}$$

的唯一非负定解矩阵.

证 由(1.11)知,$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) = \mathrm{tr}[G\sum_{i=1}^{\infty}\bar{A}^i\Delta\pi\bar{A}^{\tau i}] = \mathrm{tr}[\Delta\pi\sum_{i=1}^{\infty}\bar{A}^{\tau i}G\bar{A}^i]$,我们定义 $Y = \sum_{i=1}^{\infty}\bar{A}^{\tau i}G\bar{A}^i$,显然 Y 是代数 Riccati 方程 $Y = \bar{A}^\tau Y\bar{A} + G$ 的唯一解. 令 $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y^\tau_2 & X\end{bmatrix}$,并利用 $\bar{A}$, Y 和 G 的定义,直接可导出三个方程

$$Y_1 = (A - BF)^\tau Y_1(A - BF) + F^\tau RF + Q, \tag{2.3}$$

$$Y_2 = (A-BF)^{\tau}Y_2(A-KC) + (A-BF)^{\tau}Y_1BF - F^{\tau}RF, \tag{2.4}$$

$$X = (A-KC)^{\tau}X(A-KC) + (A-KC)^{\tau}Y_2BF + F^{\tau}B^{\tau}Y_2(A-KC) + F^{\tau}B^{\tau}Y_1BF + F^{\tau}BF. \tag{2.5}$$

由(2.3)式,即得 $Y_1 = P_1$,将其代入(2.4)式,并注意到表达式(1.5),可算得(2.4)中的$(A-BF)^{\tau}Y_1BF - F^{\tau}BF = 0$,由此导出方程(2.4)仅有唯一零解,即 $Y_2 = 0$,因此(2.1)式成立.

设 $\Omega = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leqslant \Delta W \leqslant \Delta\overline{W}; 0 \leqslant \Delta V \leqslant \Delta\overline{V}\}$ 是一有界闭凸集,显然,当$(\Delta W, \Delta V) \in \Omega$ 时,$\Delta J: \Omega \to \mathbb{R}$ 是关于$(\Delta W, \Delta V)$的一线性映射,容易证得对任意$(\Delta W_i, \Delta V_i) \in \Omega$, $i=1, 2$, ΔJ 具有下述性质:

1° 若 $\Delta W_1 \geqslant \Delta W_2; \Delta V_1 \geqslant \Delta V_2$,则 $\Delta J(u_k, \Delta W_1, \Delta V_1) \geqslant \Delta J(u_k, \Delta W_2, \Delta V_2)$.

2° 对,$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,若 $\Delta W = \alpha\Delta W_1 + (1-\alpha)\Delta W_2; \Delta V = \alpha\Delta V_1 + (1-\alpha)\Delta V_2$,则

$$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) \leqslant \max\{\Delta J(u_k, \Delta W_1, \Delta V_1), \Delta J(u_k, \Delta W_2, \Delta V_2)\}.$$

利用性质 1°,2° 及[4]中有界闭凸集上的极值原理,易获得下述定理:

定理 2.2 设$(\Delta W, \Delta V) \in \Omega$,并记 $\gamma = \max\limits_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega} \Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V)$,则 γ 必被$(\Delta\overline{W}, \Delta\overline{V})$达到.

设 $(\Delta\overline{W}, \Delta\overline{V}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \bar{\varepsilon}_i W_i, \sum\limits_{j=i}^{M} \bar{e}_j V_j\right)$,其中 $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \bar{\varepsilon}_i; 0 \leqslant e_j \leqslant \bar{e}_j$,由定理 2.2,及矩阵迹的性质

$$\Delta J(u_k, \Delta\overline{W}, \Delta\overline{V}) = \sum_{i=1}^{N} \bar{\varepsilon}_i \mathrm{tr}[W_i(P_1 + X)] + \sum_{j=1}^{M} \bar{e}_j \mathrm{tr}[V_j K^{\tau} X K] = \gamma.$$

令 $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \cdots, \bar{\varepsilon}_N); \bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_M)$,定义 $\Omega(\bar{\varepsilon}, \bar{e}) = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leqslant \Delta W \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \bar{\varepsilon}_i W_i$; $0 \leqslant \Delta V \leqslant \sum\limits_{j=1}^{M} \bar{e}_j V_j\}$ 是约束在 $N+M$ 维超平面

$$H^{N+M}: \quad \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a_i + \sum_{j=1}^{M} \bar{e}_j b_j = \gamma \tag{2.6}$$

上的一个非空有界闭凸集类.其中

$$a_i = \mathrm{tr}[W_i(P_1 + X)], \ i = 1, 2, \cdots, N; \quad b_j = \mathrm{tr}[V_j K^{\tau} X K], j = 1, 2, \cdots, M. \tag{2.7}$$

要在集类 $\Omega(\bar{\varepsilon}, \bar{e})$中寻找一个使矩阵对$(\Delta W, \Delta V)$自由扰动范围达到最大的集,此时可以拓扑等价地转化为在$\mathbb{R}^{N+M}$空间中,在约束(2.6)下,求解使 $N+M$ 维超长方体

$$\Pi(\bar{\varepsilon}, \bar{e}) = \{(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \cdots, \bar{\varepsilon}_N; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_M): 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \bar{\varepsilon}_i; 0 \leqslant e_j \leqslant \bar{e}_j\}$$

的体积达到最大,即求解问题:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\varepsilon}_i a_i + \sum_{i=1}^{M} \bar{e}_j b_j = \gamma; \quad \max\{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \cdots \bar{\varepsilon}_N \bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_M\};$$

$$\bar{\varepsilon}_i > 0, \ i = 1, 2, \cdots, N; \quad \bar{e}_j > 0, \ j = 1, 2, \cdots, M.$$

利用 Lagrange 乘子法即可求得唯一最大值点

$$\varepsilon_i^* = \frac{\gamma}{(N+M)a_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N; \quad e_j^* = \frac{\gamma}{(N+M)b_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, M. \tag{2.8}$$

定理 2.3 在假设 1)~4)下,具有不确定噪声的系统(1.1),(1.2),对任意给定的自由度$\gamma > 0$,若采用 LQG 闭环调节器(1.4)~(1.9),则存在不确定噪声协方差矩阵对$(\Delta W, \Delta V)$的唯一最大自由扰动界:

$$\Omega^* = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leqslant \Delta W \leqslant \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^* W_i; 0 \leqslant \Delta V \leqslant \sum_{j=1}^{M} e_j^* V_j\},$$

$$\Delta W^* = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^* W_i, \ \Delta V^* = \sum_{j=1}^{M} e_j^* V_j.$$

当$(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*$时,能确保控制性能指标

$$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) \leqslant \Delta J(u_k, \Delta W^*, \Delta V^*) = \gamma$$

恒成立,其中ε_i^*和e_j^*为(2.8)式.

3 确保控制性能的鲁棒 LQG 调节器

设U是对应于(1.4)的全体容许控制集,若采用与$(W^*, V^*) = (W + \Delta W^*, V + \Delta V^*)$相对应的标准 Kalman 滤波器

$$\hat{x}^*_{k+1,k} = A\hat{x}^*_{k,k-1} + Bu_k + K^*(y_k - C\hat{x}^*_{k,k-1}), \tag{3.1}$$

$$K^* = AP_2^* C^\tau (V^* + CP_2^* C^\tau)^{-1}, \tag{3.2}$$

$$P_2^* = (A - K^* C) P_2^* (A - K^* C)^\tau + K^* V^* K^{*\tau} + W^* \tag{3.3}$$

和状态反馈律

$$u_k^* = -F\hat{x}^*_{k,k-1}. \tag{3.4}$$

由最优控制原理及$\Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V)$的性质1°,易获得

$$\Delta J(u_k^*, \Delta W, \Delta V) \leqslant \Delta J(u_k^*, \Delta W^*, \Delta V^*) \leqslant \Delta J(u_k, \Delta W^*, \Delta V^*). \tag{3.5}$$

上述结果要归结为如下

定理 3.1 在定理2.3条件下,若在Ω^*中采用与最大矩阵对(W^*, V^*)相对应的 LQG 闭环调节器(3.1)~(3.4)以及(1.5),(1.6),则存在鞍点$(u_k^*, \Delta W^*, \Delta V^*)$,满足鞍点不等式(3.5).此时,由对策论基本原理可得到

$$\min_{u \in U} \max_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*} \Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V) = \max_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*} \min_{u \in U} \Delta J(u_k, \Delta W, \Delta V).$$

即最坏情况下的 LQG 调节器也就是极小极大鲁棒 LQG 调节器.

4 例 子

考虑一离散时间随机线性系统

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + w_k^0, \quad y_k = [1 \quad 0] x_k + v_k^0.$$

已知 $W = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 \end{bmatrix}$, $W_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, $V = 1$, $V_1 = 1$, $R = 1$, $\gamma = 0.3$.

1) 求解方程(1.6),(1.9),并代入(1.5),(1.8)得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.4839 & 0.7041 \\ 0.7041 & 2.4229 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3678 & 0.2102 \\ 0.2102 & 0.4981 \end{bmatrix},$$

$$F = [0.5377, 0.2268], \quad K = \begin{bmatrix} 0.2420 \\ 0.1229 \end{bmatrix}.$$

2) 求解方程(2.2),并代入(2.7)得

$$X = \begin{bmatrix} 1.1144 & 0.5658 \\ 0.5658 & 0.3548 \end{bmatrix}, \quad a_1 = 0.7916, \quad b_1 = 0.1043.$$

并由(2.8)式获得$\varepsilon_1^* = 0.1895$, $e_1^* = 1.4384$.

3) 采用极小极大鲁棒 LQG 调节器获得

$$\Delta J(u_k^*, \Delta W^*, \Delta V^*) = \mathrm{tr}[\Delta W^*(P_1 + X^*)] + \mathrm{tr}[\Delta V^*(K^{*\tau} X^* K^*)] = 0.2671 < 0.3.$$

其中

$$P_2^* = \begin{bmatrix} 0.2959 & 0.1446 \\ 0.1446 & 0.3457 \end{bmatrix}, \quad K^* = \begin{bmatrix} 0.0450 \\ 0.0223 \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} 0.2436 & 0.2238 \\ 0.2238 & 0.2679 \end{bmatrix}.$$

5 结　论

本文从理论上证明了在假设条件 1)~4)下，具有不确定噪声的系统(1.1)，(1.2)对任意给定的 $\gamma>0$，存在唯一最大自由扰动界 Ω^*，当$(\Delta W, \Delta V)\in\Omega^*$时能确保控制性能指标的偏离度不超过 γ，并且在此界限内设计的极小极大鲁棒 LQG 闭环调节器能极小化不确定下的最坏性能．这些结果保证了这种鲁棒调节器在应用中能将性能指标值控制在实际要求的精度内．

参 考 文 献

1 Borsen Chen and Tayyuh Dong. LQG optimal control system design under plant perturbation and noise certainty: a state-space approach. Automatica, 1989, 25(3): 431－436

2 Luo, J. S. and Johnson, A.. Stability robustness of the discrete-time LQG system under plant perturbation and noise uncertainty. Int. J. Control, 1992, 55(6): 1491－1502

3 Sangsuk-iam, S. and Bullock, T. E. Analysis of discrete-time Kalman filtering under incorrect noise covariances. IEEE Trans. Automat. Contr. 1990, AC-35(12): 1304－1309

4 Luenderger, D.. Optimization by vector space methods. New York: Wiley, 1969

Robust LQG Regulator of Guaranteed Control Performance under Uncertain Noise

XI Hongsheng

(Department of Automation, University of Science & Technology of China·Hefei, 230027, PRC)

Absract: In the paper, the robust LQG problem for the discrete-time stochastic linear system with uncertain noise is considered. The perturbation upper bounds on uncertain noise covariances that guarantee control performance are obtained, and the design method of minimax robust LQG regulator is also given in the perturbation upper bounds. In particular, it is shown that this regulator can minimize the worst performance in uncertain-case and guarantee control performance index to be within a given freedom.

Key words: uncertain noise; robust LQG regulator; perturbation upper bounds

本文作者简介

奚宏生　1950 年生．毕业于中国科学技术大学数学系，理学硕士，现任中国科学技术大学自动化系副教授．在现代控制理论及应用方面发表学术论文三十余篇，目前从事鲁棒控制和离散事件系统等方面的研究工作．