有穷固定模的确定与消除 *

张庆灵　戴冠中　　　M. de la San

(西北工业大学自动控制系·西安, 710072)　(Universidad Pais Vasco, Spain)

摘要: 本文研究带前馈广义分散控制大系统有穷固定模的确定与消除问题. 给出一种不依赖于系统特征值确定与消除有穷固定模的方法.

关键词: 广义大系统; 分散控制; 有穷固定模

1 引　言

以前对于分散控制大系统有穷固定模的确定要求事先知道系统的特征值, 在应用上往往是不方便的. Anderson 在 1981 年提出希望能找到一种不依赖于系统特征值确定有穷固定模的方法[1]. 本文研究带前馈广义分散控制大系统有穷固定模的确定与消除问题. 给出一种不依赖于系统特征值确定与消除有穷固定模的方法.

2 有穷固定模的确定

考虑如下的带前馈广义分散控制大系统(以下简称广义大系统):

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + \sum_{i=1}^{N} b_i u_i, \tag{1a}$$

$$y_i = c_i x + \sum_{j=1}^{N} d_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{1b}$$

其中, x, u_i 和 y_i 依次表示 n 维状态向量, 第 i 个子系统的输入函数和输出函数; E, A, b_i, c_i 和 d_{ij} 分别表示具有相应阶数的矩阵. 假定广义大系统(1)正则, 即矩阵 $[sE - A]$ 的行列式不恒等于零. 有时将广义大系统(1)简记为 (E, A, B, C, D).

相应的静态分散输出反馈为

$$u_i = -k_i y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

这里 k_i 为待定常数. 记 $K = \text{block diag}[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_N]$. 当假定 $(I - DK)^{-1}$ 存在时, 由上两式得广义大系统(1)所对应的闭环系统为:

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = [A + BK(I - DK)^{-1}C]x. \tag{3}$$

这时, 如果

$$\det[sE - A - BK(I - DK)^{-1}C] \not\equiv 0, \tag{4}$$

且存在某个复数 s_0 使

$$\det[s_0 E - A - BK(I - DK)^{-1}C] = 0, \tag{5}$$

对所有可能的 K 成立, 则称复数 s_0 为广义大系统(1)的有穷固定模.

注意到 $(I - DK)^{-1}$ 存在时,

$$\begin{bmatrix} I & -BK(I - DK)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A & BK \\ C & I - DK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE - A - BK(I - DK)^{-1}C & 0 \\ C & I - DK \end{bmatrix}. \tag{6}$$

* 中国博士后科学基金, 国家自然科学基金和辽宁省科学技术基金资助项目.

本文于 1995 年 5 月 19 日收到. 1996 年 7 月 8 日收到修改稿.

我们得到:

引理 1 如果$(I-DK)^{-1}$存在,则式(5)成立当且仅当

$$\det\begin{bmatrix} s_0E-A & BK \\ C & I-DK \end{bmatrix}=0. \tag{7}$$

对所有可能的 K 成立. 根据这一引理,可构造

$$\det\left\{\begin{bmatrix} sE-A & 0 \\ C & I \end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix} b_i \\ -d_i \end{bmatrix}k_i[0 \quad e_i^t]\right\}=0. \tag{8}$$

其中,$d_i^t=[d_{1i} \quad d_{2i} \quad \cdots \quad d_{Ni}]$,$e_i$ 为具有适当阶数的单位向量. 这样,可通过式(8)来确定广义大系统(1)的有穷固定模.

记 $f_0(s)=\det[sE-A]$;对于集合$\{1,2,\cdots,N\}$的非空子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$,$i_1<i_2<\cdots<i_r$,记

$$f_{i_1i_2\cdots i_r}(s)=\det\begin{bmatrix} sE-A & b_{i_1} & b_{i_2} & \cdots & b_{i_r} \\ c_{i_1} & d_{i_1i_1} & d_{i_1i_2} & \cdots & d_{i_1i_r} \\ c_{i_2} & d_{i_2i_1} & d_{i_2i_2} & \cdots & d_{i_2i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i_r} & d_{i_ri_1} & d_{i_ri_2} & \cdots & d_{i_ri_r} \end{bmatrix}$$

并把式(8)中行列式记为 $f_c(s)$. 由文[2]递推得到:

引理 2 广义大系统(1)的闭环特征多项式 $f_c(s)=\det[sE-A-BK(I-DK)^{-1}C]$可以表示为

$$f_c(s)=f_0(s)+\sum_{i=1}^{N}k_if_i(s)+\cdots+k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_r}f_{i_1i_2\cdots i_r}(s)+\cdots+k_1k_2\cdots k_Nf_{12\cdots N}(s). \tag{9}$$

定理 1 广义大系统(1)不存在有穷固定模的充要条件是多项式 $f_0(s)$, $f_1(s)$, $\cdots$, $f_{12\cdots N}(s)$互素.

证 必要性. 设这组多项式不是互素的,则存在非常数公因子 $g(s)$和多项式 $f^1_{i_1i_2\cdots i_r}(s)$使

$$f_{i_1i_2\cdots i_r}(s)=g(s)f^1_{i_1i_2\cdots i_r}(s), \tag{10a}$$

$$f_0(s)=g(s)f_0^1(s). \tag{10b}$$

于是,$g(s)=0$ 的根 s_0 使式(9)中 $f_c(s_0)=0$,并与 k_i 无关. 则 s_0 为广义大系统(1)的一个有穷固定模. 与给定条件相矛盾.

充分性. 设这组多项式互素. 则对于满足 $f_0(s_0)=0$ 的复数 s_0,必然有一个在下标中含$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)$个数最少的 $f_{i_1i_2\cdots i_r}(s_0)\neq0$. 这时,如果 s_0 是广义大系统(1)的有穷固定模,则由式(9)得到:

$$-k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_r}f_{i_1i_2\cdots i_r}(s_0)=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r}k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_r}f_{j_1j_2\cdots j_r}(s_0)+\cdots+k_1k_2\cdots k_Nf_{12\cdots N}(s_0). \tag{11}$$

其中,右端不含有下标为 $i_1i_2\cdots i_r$ 的项;对满足$(I-DK)^{-1}$存在的所有 K 成立. 易见,式(11)左端非零. 则右端也非零. 按有穷固定模定义,当适当选取 k_{i_1}, k_{i_2}, $\cdots$, k_{i_r}使式(11)左端非零时,由于右端至少含有一个不同于 k_{i_1}, k_{i_2}, $\cdots$, k_{i_r}的 k_i 在$(I-DK)^{-1}$存在的条件下可任意取值,使式(11)成立. 再将 k_{i_1}, k_{i_2}, $\cdots$, k_{i_r}, k_i 以外的 k_j 取定,由式(11)的左端非零知右端非零.

这样，式(11)右端为 k_i 的线性函数．这是一个矛盾．所以，s_0 不是广义大系统(1)的有穷固定模．　证毕．

不失一般性，在下面的讨论中假设所有 $f_{j_1j_2\cdots j_r}(s)\neq 0$.

引理 3　设 G 和 H 分别为 $n\times n$ 和 $m\times m$ 阶方阵．$g(s)=\det(sI-G)$，则 G 和 H 没有公共特征值的充要条件是

$$\mathrm{rank}[g(H)]=m. \tag{12}$$

证　设

$$g(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n), \tag{13}$$

则

$$g(H)=(H-s_1I)(H-s_2I)\cdots(H-s_nI). \tag{14}$$

设 H 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则

$$\det g(H)=(\lambda_1-s_1)(\lambda_2-s_1)\cdots(\lambda_m-s_n). \tag{15}$$

易得到，式(12)成立当且仅当 G 和 H 没有公共特征值．　证毕．

由引理 3 可证：

定理 2　广义大系统(1)不存在有穷固定模的充要条件是

$$\mathrm{rank}[f_1(A_0)\quad f_2(A_0)\quad \cdots\quad f_{12\cdots N}(A_0)]=t. \tag{16}$$

其中　$f_0(s)=a\det(sI-A_0)=a(s^t+a_{t-1}s^{t-1}+\cdots+a_1s+a_0)$；

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{t-1}\end{bmatrix}. \tag{17}$$

实际上，由 $\deg f_{i_1i_2\cdots i_r}(s)\leqslant \mathrm{rank}\,E$，$\deg f_0(s)\leqslant \mathrm{rank}\,E$ 得知，在这些多项式中，最多有 $r_1(=\mathrm{rank}\,E+1)$ 个多项式线性无关．不失一般性，记为 $F_1(s),F_2(s),\cdots,F_{r_1}(s)$，并包含 $f_0(s)$．由于其它多项式可以由 $F_1(s),F_2(s),\cdots,F_{r_1}(s)$ 线性表出，我们直接有

定理 3　广义大系统(1)不存在有穷固定模的充要条件是

$$\mathrm{rank}[F_1(A_0)\quad F_2(A_0)\quad \cdots\quad F_{r_1}(A_0)]=t. \tag{18}$$

应指出，这些结果同样适用于多输入多输出广义大系统．可以用同样方法给出多输入多输出广义大系统存在有穷固定模的判据．另外，当系统的某些特征值已知时，仍然可由这些特征值构造式(17)中矩阵，并由上述定理确定是否存在有穷固定模．

3　有穷固定模的消除

为了保证有穷固定模的消除，设广义大系统(1)联合 R- 能控且联合 R- 能观，即 (E,A,B,C,D) R- 能控且 R- 能观．

设广义大系统(1)存在有穷固定模，这时有

$$\mathrm{rank}[F_1(A_0)\quad F_2(A_0)\quad \cdots\quad F_{r_1}(A_0)]=t-t_1. \tag{19}$$

这里 t 为矩阵 A_0 的阶数；t_1 为正整数．

我们的目的是，通过增加子系统之间的信息通讯来消除有穷固定模．具体做法是：

选择矩阵对 $(b_i,\ c_j)$，$i\neq j$．对应增加的反馈矩阵记为 k_{ij}．代入[2]

$$\det[M+bkc]=\det M+k\det\begin{bmatrix}M & b\\ -c & 0\end{bmatrix}. \tag{20}$$

得到此时的闭环特征多项式 $F_c(s)$为

$$F_c(s) = f_c(s) - k_{ij}\det\left\{\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} sE-A & 0 \\ C & I \end{bmatrix}\sum_{j=1}^{N}\begin{bmatrix} b_j \\ -d_i \end{bmatrix}^{k_j[0 \quad e_j^t]} & \begin{bmatrix} b_i \\ -d_{ij} \end{bmatrix} \\ [0 \quad e_j^t] & [0] \end{array}\right\}. \tag{21}$$

记式 (21) 中右端 第二 项行列 式为 $f_{c_{ij}}(s)$. 它由式 (20) 递推求得. 对应的反馈矩阵为 $K + e_i k_{ij} e_j^t$.

2) 在 $f_{c_{ij}}(s)$中选择多项式 $F_{c_1}(s), F_{c_2}(s), \cdots, F_{c_{r2}}(s)$, 使与 $F_1(s), F_2(s), \cdots, F_{r_1}(s)$合到一起构成 $F_c(s)$的一个极大线性无关组.

3) 设式(19)中矩阵的最大左零化矩阵为 S_f. 则[3]

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}[F_1(A_0)F_2(A_0)\cdots F_{r_1}(A_0)F_{c_1}(A_0), F_{c_2}(A_0), \cdots, F_{c_{r2}}(A_0)] \\ &= (t - t_1) + \operatorname{rank}S_f[F_{c_1}(A_0), F_{c_2}(A_0), \cdots, F_{c_{r2}}(A_0)]. \end{aligned} \tag{22}$$

这时, 如果

$$\operatorname{rank}S_f[F_{c_1}(A_0),\ F_{c_2}(A_0),\ \cdots, F_{c_{r2}}(A_0)] = t_1. \tag{23}$$

则根据定理 3 知, 广义大系统(1)在反馈矩阵 $K + e_i k_{ij} e_j^t$ 作用下不具有有穷固定模. 否则重复上述过程, 直至消除为止.

如果希望消除的广义大系统有穷固定模已知, 仍然可以用类似的办法消除有穷固定模.

对于广义大系统(1)的脉冲固定模和无穷固定模的消除以及多输入多输出情况可类似处理. 这里不再累述.

参 考 文 献

1 Chang, T.N. and Davison, E.J.. Decentralized control for descriptor type systems. Proc. of IEEE 25th CDC, 1989, 1176-1181

2 张庆灵. 单输入广义系统的能控性, 极点配置与镇定. 控制理论与应用, 1991, 7(2): 220-223

3 Zhang, Q.L.. Algebraic Characterizations of Fixed Modes in Decentralized Descriptor Systems. Proc of the IEEE 28th CDC, 1989, 866-871

Determination and Elimination of Finite Fixed Modes

ZHANG Qingling and DAI Guanzhong

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University. Xi'an, 710072, PRC)

M. de la Sen

(Universidad Pais Vasco, Spain)

Abstract: In this paper, the problems of determination and elimination of finite fixed modes for decentralized control descriptor systems with direct feedback are investigated. A way independent of system eigenvalues to determine and eliminate the finite fixed modes is developed.

Key words: large-scale descriptor systems; decentralized control; finite fixed modes

本文作者简介

张庆灵 西北工业大学航空宇航技术流动站博士后, 副教授. 主要研究方向为广义大系统, 分散控制与鲁棒控制.

戴冠中 见本刊 1997 年第 1 期第 84 页.

M. de la Sen 西班牙 Pais Vasco 大学教授. 主要研究方向为自适应控制, 分散控制和计算机仿真等等.