第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

同时镇定问题的一个数值解法*

赵明旺

(武汉冶金科技大学自动化系·武汉,430081)

摘要:本文运用多项式稳定性充分判据,将不同阶次线性系统的同时镇定问题化成非线性不等式组的求解,然后提出求解不等式组的拟牛顿下山数值法,并应用于同时镇定问题中,算例表明该方法的有效性.

关键词:同时镇定;鲁棒控制;不等式;多项式稳定性;数值算法

1 问题描述

同时镇定问题一直是鲁棒控制和容错控制研究中所关注的,有较强实用背景的问题,如实际系统在不同工作点的线性化模型是不同的,测量器或执行器存在故障时的模型亦是不同的,此外,文[1]还证明 SISO 区间系统用一阶控制器同时镇定的充要条件是同时镇定 16 个顶点对象等,近年同时镇定问题得到极大重视,文[1~3]对此有深入探讨.

本文讨论如下阶次可不同的 r 个 SISO 线性定常连续系统的同时镇定问题的数值算法,

$$G_i(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = \frac{b_{i,0}s^{n_i} + b_{i,1}s^{n_i-1} + \cdots b_{i,n_i}}{a_{i,0}s^{n_i} + a_{i,1}s^{n_i-1} + \cdots a_{i,n_i}}, \quad a_{i,0} = 1, i = \overline{1,r}. \tag{1}$$

其中,$a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 为第 i 个系统的系数;n_i 为其阶次,该镇定问题考虑的是:是否存在同一控制器

$$G_C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \cdots + \beta_m}{\alpha_0 s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \cdots + \alpha_m}, \quad \alpha_0 = 1 \tag{2}$$

使得如下 r 个闭环系统的特征多项式为同时稳定

$$\begin{aligned} f_{e,i}(s) &= D_C(s)D_i(s) + N_C(s)N_i(s) \\ &= e_{i,0}s^{m_i-1} + e_{i,1}s^{m_i-1} + \cdots + e_{i,m_i}, \quad m_i = n_i + m, i = \overline{1,r}. \end{aligned} \tag{3}$$

其中 α_i 和 β_i 为控制器的待定参数;$e_{i,k} = \sum_{j=0}^{k}(a_{i,j}\alpha_{k-j} + b_{i,j}\beta_{k-j})$ 为第 i 个闭环特征多项式系数.

综合 Hurwitz 判据和文[4]的多项式稳定性充分条件,有如下多项式稳定性判据引理.

引理 1 对代数多项式 $e_0s^n + e_1s^{n-1} + \cdots + e_{n-1}s + e_n (e_k > 0, k = \overline{0,n})$ 有如下结论:

1) 当阶次 n 小于 3 时,则多项式稳定;

2) 当 n 等于 3 时,则多项式稳定的充分必要条件为 $e_0e_3 < e_1e_2$;

3) 当 n 等于 4 时,则多项式稳定的充分条件为 $e_ke_{k+3} < 0.5e_{k+1}e_{k+2}, k = 0,1$;

4) 当 n 大于 4 时,则多项式稳定的充分条件为 $e_ke_{k+3} < 0.4655e_{k+1}e_{k+2}, k = \overline{0, n-3}$.

文[4]指出:上述引理结论 4)中的参数 0.4655 若换为大于 0.5 的正数,则一定可以构造出不稳定的多项式.因此,上述引理的条件已经非常弱.基于上述稳定性引理和闭环特征多项

* 湖北省自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 6 月 7 日收到.1996 年 3 月 19 日收到修改稿.

式表示(3),本文的同时镇定问题则可转换成如下非线性不等式组的求解问题

$$\begin{cases} e_{i,k} > 0, \quad k = \overline{0, m_i}, \\ \gamma_i e_{i,k+1} e_{i,k+2} - e_{i,k} e_{i,k+3} > 0, \quad 当\ m_i \geqslant 3\ 时, k = \overline{0, m_i - 3}, \end{cases} \quad i = \overline{1, r}. \tag{4}$$

其中

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & m_i = 3, \\ 0.5, & m_i = 4, \\ 0.4655, & m_i > 4. \end{cases}$$

2 非线性不等式组的拟牛顿法求解方法

在方程数与变量数一致的非线性方程的数值解法中,牛顿法是一种具有平方收敛性的较佳解法[5].下面,将牛顿法的思想推广至求解如下非线性不等式组,

$$f_i(x) > 0, \quad i = \overline{1, p}. \tag{5}$$

其中 x 的维数为 $q(q \leqslant p)$.通过加松驰变量 $z_i(i = \overline{1, p})$,则不等式组(5)可化为如下方程组

$$g(x, z) = \begin{bmatrix} f_1(x) - z_1^2 \\ \vdots \\ f_p(x) - z_p^2 \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

其中松驰变量 $z_i(i = \overline{1, p})$ 为非零,值得指出的是:方程组(6)的方程数为 p,而变量数为 $q + p$.

将式(6)所示的函数 $g(x, z)$ 在点(x_k, z_k)展开至泰勒一阶展开式,即有

$$g(x, z) \approx g(x_k, z_k) + G_k \begin{bmatrix} x - x_k \\ z - z_k \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中 $G_k = [\dfrac{\mathrm{d}g(x_k, z_k)}{\mathrm{d}x} \quad \dfrac{\mathrm{d}g(x_k, z_k)}{\mathrm{d}z}]$ 为方向矩阵.牛顿法的思想为令新递推值使泰勒展开式为零.类似于牛顿法,若令式(7)中 $g(x_{k+1}, z_{k+1}) = 0$,则新递推值 x_{k+1} 和 z_{k+1} 满足

$$G_k \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{bmatrix} = - g(x_k, z_k). \tag{8}$$

在方程(8)中,方程数为 p,而变量数为 $q + p$,因此解不唯一,由代数方程理论和广义逆矩阵的定义[6],当递推值 x_{k+1} 和 z_{k+1} 满足代数方程(8)时,下述解为其通解

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} - G_k^- g(x_k, z_k) - (I - G_k^- G_k) u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^{q+p}. \tag{9}$$

其中矩阵 G_k^- 表示矩阵 G_k 的广义逆,由式(6)可知,

$$\frac{\mathrm{d}g(x_k, z_k)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{diag}[-2z_1 \quad -2z_2 \quad \cdots \quad -2z_p].$$

因此,当松驰变量 $z_i(i = \overline{1, p})$ 限制为非零时,则矩阵 G_k 为行满秩.由广义逆矩阵性质[6],可知计算式(9)中的 G_k^- 可由下式计算

$$G_k^+ = G_k^\tau (G_k G_k^\tau)^{-1}. \tag{10}$$

综合上述思想,可得如下非线性不等式组(5)的拟牛顿下山法的计算步骤:

步骤 1 选定初始迭代值 x_0 和 z_0,其中 z_0 的各元素为非零值.

步骤 2 按如下公式计算迭代值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{z}_1$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - G_0^+ g(x_0, z_0). \tag{11}$$

步骤 3 若在步骤 2 中的计算值 $\bar{z}_1$ 的某元素为零，或者 $\| g(\bar{x}_1,\bar{z}_1)\| \geqslant \| g(x_0,z_0)\|$，则采用步骤 2 中的计算值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{z}_1$ 的如下修正值作为新的迭代值

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1-\lambda)\left\{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} - (I - G_k^{+} G_k)u\right\}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^{q+p}. \tag{12}$$

其中 λ 为下山因子.上述修正式保证 z 的各分量的迭代值非零，函数值 $g(x_k,z_k)$ 的单调下降.

步骤 4 如果迭代值满足结束迭代条件 $\delta < \varepsilon_1$ 或 $\| g(x_1,z_1)\| < \varepsilon_2$，则终止迭代，以 x_1 作为所求的非线性不等式组(5) 的解，否则转步骤 5.此处 ε_1 和 ε_2 为允许误差，而

$$\delta = \begin{cases} \left\| \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \right\|, & \text{当} \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right\| < C \text{时}, \\ \left\| \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \right\| / \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right\|, & \text{当} \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right\| \geqslant C \text{时}. \end{cases}$$

其中 C 是取绝对误差或相对误差的控制数，一般可取 $C = 1$.

步骤 5 如果迭代未达到规定的次数，则以 x_1 和 z_1 分别代替 x_0 和 z_0，返回步骤 2 继续迭代.否则，方法失败.失败的原因可能是初始值选取不当，或者不等式组(5)本身无解.根据具体情况分析，若是初始值选取不当，则需返回步骤 1，重新选取初始值，继续迭代.

数值计算表明，上述非线性不等式组数值解法的收敛性非常好.对于解二次不等式组(即不等式中 $f_i(x)$ 为二次函数)，只要解存在，上述拟牛顿下山法仅需迭代有限几次即可收敛.

3 同时镇定问题的数值求解

基于上节的拟牛顿下山算法，同时镇定问题转化得的不等式组(4)的求解可等效为如下非线性方程组的求解问题

$$F_{i,1}(A,B,Z_{i,1}) = \begin{bmatrix} e_{i,0} - z_{i,1,0}^2 \\ \vdots \\ e_{i,m_i} - z_{i,1,m_i}^2 \end{bmatrix} = 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{13}$$

$$F_{i,2}(A,B,Z_{i,2}) = \begin{bmatrix} \gamma_i e_{i,1} e_{i,2} - e_{i,0} e_{i,3} - z_{i,2,1}^2 \\ \vdots \\ \gamma_i e_{i,m_i} - 2e_{i,m_i-1} - e_{i,m_i} - 3e_{i,m_i} - z_{i,2,m_i-3}^2 \end{bmatrix} = 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{14}$$

其中 $A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m]^\tau$，$B = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_m]^\tau$，

$Z_{i,1} = [z_{i,1,0} \quad z_{i,1,1} \quad \cdots \quad z_{i,1,m_i}]^\tau$，$Z_{i,2} = [z_{i,2,1} \quad z_{i,2,2} \quad \cdots \quad z_{i,2,m_i-3}]^\tau$.

上述非线性方程组是变量 $\alpha_i,\beta_i,z_{i,j,k}$ 的二次函数，因此根据上节的拟牛顿下山法，编制相应的数值计算程序，利用计算机可方便、有效地求得其解，也就是相应地求得同时镇定问题的解.在利用该数值解法时，式(7)中的梯度方向矩阵 G_k 为

$$G_k = \begin{bmatrix} \dfrac{dF_{i,1}}{dA} & \dfrac{dF_{i,1}}{dB} & \dfrac{dF_{i,1}}{dZ_{i,1}} & 0 \\ \dfrac{dF_{i,2}}{dA} & \dfrac{dF_{i,2}}{dB} & 0 & \dfrac{dF_{i,2}}{dZ_{i,2}} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

其中，$\dfrac{dF_{i,1}}{dA}$，$\dfrac{dF_{i,1}}{dZ_{i,1}}$ 和 $\dfrac{dF_{i,2}}{dA}$ 如下所示，$\dfrac{dF_{i,1}}{dB}$，$\dfrac{dF_{i,2}}{dZ_{i,2}}$ 和 $\dfrac{dF_{i,2}}{dB}$ 的表示可类似地得到.

$$\frac{\mathrm{d}F_{i,1}}{\mathrm{d}A}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{i,0} & & \\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & a_{i,0} \\ a_{i,n_i} & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots \\ & & a_{i,n_i} \end{bmatrix}_{(m_i+1)\times m},$$

$$\frac{\mathrm{d}F_{i,1}}{\mathrm{d}Z_{i,1}}=\mathrm{diag}[-2z_{i,1,0}\quad -2z_{i,1,1}\quad \cdots \quad -2z_{i,1,m_i}],$$

$$\frac{\mathrm{d}F_{i,2}}{\mathrm{d}A}=[\gamma_i e_{i,k+1}a_{i,k-l}+\gamma_i e_{i,k}a_{i,k+1-l}-e_{i,k+2}a_{i,k-l-1}-e_{i,k-1}a_{i,k+2-l}]_{k,l},$$

$$k=\overline{0,m_i-3},\quad l=\overline{1,m},\quad a_{i,j}=0,\quad j>n_i \text{ 或 } j<0.$$

4 算 例

考虑如下两组系统的同时镇定问题:

1) 同阶系统: $G_1(s)=\dfrac{s}{s^2+s+1}$, $G_2(s)=\dfrac{2}{s^2+s-1}$, $G_3(s)=\dfrac{s+2}{s^2-s+2}$,

2) 不同阶系统: $G_1(s)=\dfrac{0}{1}$, $G_2(s)=\dfrac{-2}{s+1}$, $G_3(s)=\dfrac{s+2}{s^2-s+2}$.

第 2 组中的第 1 个系统的意义为要求该同时镇定控制器 $G_C(s)$ 本身是稳定的,两组选择 $G_C(s)$ 为一阶系统$\dfrac{\beta_0 s+\beta_1}{s+\alpha_1}$. 表 1 是利用本文方法在两种初始迭代值下的求解结果.

表 1 数值计算结果

	组 1	组 2
初始迭代值	$\{-10,-10,-10,1,1,1,\cdots\}$	$\{-10,-10,-10,1,1,1,\cdots\}$
控制器	$\dfrac{1.2954s+0.7974}{s+0.0012}$	$\dfrac{5.5828s+2.5983}{s+10.1771}$
闭环多项式	$s^3+2.2966s^2+1.7986s+0.0012$ $s^3+1.0012s^2+1.5920s+1.5935$ $s^3+0.2966s^2+5.3870s+1.5971$	$s+10.1771$ $s^2+0.0115s+4.9806$ $s^3+14.760s^2+5.5868s+25.551$
初始迭代值	$\{10,10,10,2,2,2,\cdots\}$	$\{10,10,10,2,2,2,\cdots\}$
控制器	$\dfrac{1.3352s+2.9549}{s+0.9295}$	$\dfrac{19.3355s+38.1734}{s+76.3477}$
闭环多项式	$s^3+2.2646s^2+4.8844s+0.9295$ $s^3+1.9295s^2+2.5998s+4.9804$ $s^3+1.2646s^2+6.6958s+7.7689$	$s+76.3477$ $s^2+38.6767s+0.0008$ $s^3+94.683s^2+2.4967s+229.04$

本文方法只是求解同时镇定问题的相应的非线性不等式组的一个可行解,关于该解的性质,以及求解具有较好特性的解是本文方法的进一步发展需讨论的问题.

参 考 文 献

1 Barmish, B. R., et al.. Extreme ponit results for robust stabalization of interval plants with first order compensators. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(6):707－714

2 Djaferis, T. E.. To stabilize a k real parameter affine family of plants it suffices to simultaneously stabilize 4^k polynomials. Systems and Control Letters, 1991, 16:187－193

3 Wu D., et al.. Algorithm for simultaneous stabilization of single-input systems via dynamic feedback. Int J. Control, 1990, 51 (3):631－642

4 聂义勇. 多项式稳定性的一类新判据. 力学, 1976, (2):110－116

5 李庆扬等. 数值分析. 武汉:华中工学院出版社, 1982

6 陈大新. 矩阵理论. 上海:上海交通大学出版社, 1991

A Numerical Algorithm for Simultaneous Stabilization Problem

ZHAO Mingwang

(Department of Automation, Wuhan Yejin University of Science & Technology· Wuhan, 430081, PRC)

Abstract: In this paper, the simultaneous stabilization problem for linear systems with different orders is transformed as a solving problem of nonlinear inequalities, by using a sufficient criterion of polynomial stability. Then a quasi-Newton numeric algorithm for solving inequalities is presented firstly, and is applied to solving the simultaneous simulation problem. Two examples show the effectiveness of the method.

Key words: simultaneous stabilization; robust control; inequalities; polynomial stability; numeric algorithm

本文作者简介

赵明旺　1964 年生. 1990 年毕业于浙江大学工业控制研究所, 获博士学位. 现为武汉冶金科技大学自动化系教授、系副主任. 主要研究方向为系统辨识和自适应控制, 鲁棒控制和智能控制.