二维齐次高阶临界系统的稳定性判别算法

苗 原 李春文 胡世文

(清华大学自动化系·北京, 100084)

摘要: 本文给出了一种判别二维高次齐次非线性临界系统的稳定性的算法, 这一算法对中心流形是 2 维高次的系统通过构造李亚普诺夫函数来判稳有良好的效果. 依据这种算法编制成的程序对随机产生的 40 个临界非线性系统, 均顺利地找到了相应的李亚普诺夫函数.

关键词: 非线性系统; 临界系统; 稳定性; 李亚普诺夫函数; Inners 算法.

1 引 言

确保稳定性对于控制系统的设计来说是必不可少的. 在非线性系统领域中, 尤其是对于含二维以上临界部分的系统, 李亚普诺夫第二方法[1]一直是最重要的判稳方法. 李亚普诺夫函数不仅是一种重要的判稳工具, 而且与使系统渐近稳定的控制律之间还有着密切的联系[2,3]. 对于非线性系统的非临界部分, 可以由李亚普诺夫第一近似定理判定其稳定性, 一维的临界部分的稳定性可以由中心流形定理得到. 对二维高次临界部分, 中心流形上的稳定性判据仍无一般算法, 只能通过寻找李亚普诺夫函数的方法来实现. 然而李亚普诺夫第二方法不是一个构造性方法, 至今为止, 虽有众多理论结果[4], 却只有少量算法, 且常依赖于系统的特殊结构或某些特殊技巧. 本文利用[5]中的正则判别函数法减少构造李亚普诺夫函数时的约束, 利用[6]中 Inners 方法判定正定性, 设计了一个针对二维高阶临界齐次多项式系统的稳定性判定算法. 这一算法的计算机实现对随机产生的 40 个相应系统均顺利地找到了李亚普诺夫函数, 因而是很有效的.

2 算法的理论基础

对于如下系统的稳定性问题

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

其中 $x \in B_\delta \subset \mathbb{R}^n$, B_δ 是原点的邻域, $f(0) = 0$, $f(\cdot) \in \mathbb{C}^\infty$. 有以下结果[5].

定理 1 设存在连续可微函数 $v(x)$, $v(0) = 0$, 使得沿系统(1)轨线的导数在原点的某个邻域内是正定的. 则若 $v(x)$ 负定, 系统(1)是渐近稳定的, 否则(即 $v(x)$ 不负定), 系统(1)是不稳定的.

定理 1 提供了一种研究系统稳定性问题的新思路. 它的优点在于一旦对系统找到了一个 $v(x)$, $\dot{v}(x)$ 定号, 系统的稳定性质即可得到判断. 由于它在寻找 $v(x)$ 时只要求 $\dot{v}(x)$ 定号, 而对 $v(x)$ 没有要求, 因而使约束减少, 也更易于构造.

在本文的算法中, 为了对多项式进行正定检验, 用到了 Inners 的概念, 一个矩阵的 Inners 定义可以见[7], 这里仅举一个例子说明其含义.

例 1 给定一个 6×6 阵 Δ_6, 它有两个 Inners, Δ_2, Δ_4, 如下所示:

本文于 1995 年 9 月 28 日收到. 1996 年 8 月 14 日收到修改稿.

$$\Delta_6=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46}\\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56}\\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}\end{bmatrix},\quad \Delta_4=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}\end{bmatrix},\quad \Delta_2=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}.$$

类似的，给定一个 5×5 阵 Δ_5，它也有两个 Inners，即 Δ_1,Δ_3.

对一个多项式 $P(x)=\sum_{j=0}^{n}a_ix^i,a_n\neq0$　构造矩阵

$$\Delta=\Delta_{2n-1}=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ & & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0\\ 0 & \cdots & 0 & na_n & ((n-1)a_{n-1} & \cdots & a_1\\ 0 & \cdots & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 0\\ & & & \cdots & & & \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

则有如下结果[7]：

定理 2　$P(x)=0$ 的实根的个数为 N，则

$$N=\mathrm{var}[+,-|\Delta_1|,\cdots,(-1)^n|\Delta_{2n-1}|]-\mathrm{var}[+,|\Delta_1|,\cdots|\Delta_{2n-1}|]$$

其中 var 为[·]中 + − 变化的次数.

显然，$P(x)$ 全局正定当且仅当 $a_0>0$ 且 $N=0$. 对于二维齐多项式，有如下结果[6]：

定理 3　$v(x_1,x_2)=a_nx_1{}^n+a_{n-1}x_1{}^{n-1}x_2+\cdots+a_0x_2{}^n$ 正定当且仅当 $a_n>0$ 且 $v_1(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{a-1}+\cdots+a_0$ 全局为正值.

3　算法及例子

本节根据上节的理论给出构造二维齐次非线性系统正则判别函数的算法：

1) 根据系统的阶数确定 $v(x_1,x_2)$ 的阶数；2) 随机产生 $v(x_1,x_2)$ 的系数；3) 计算 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；4) 计算 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 对应的一元多项式的 Inner 行列式，判断 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 是否定号，若否，转步骤 2)；5) 输出结果，若 v 定号，且与 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 反号，则系统渐近稳定，否则系统不稳定.

其中第 4)步中，程序采用下述算法[6]，即可得到所有 Inners 的行列式. 它相当于做一次 $2n-1$ 阶矩阵的高斯消元. 以下记 $\Delta(i,k)$ 为 Δ 的第 i 行，第 k 列元素，记 $\Delta(k)$ 为 Δ 的第 k 列.

$i=i_1=i_2=n,j=j_1=j_2=n,$

for $k=n+1$ to $k=2n-1$, do $\Delta(k)=\Delta(k)-\Delta(n)\times\frac{\Delta(i,k)}{\Delta(i,j)}$,

while $i_1\neq0$,

$\{i_1--,j_1--,i_2++,j_2++,$

for $k=j_2$ to $k=2n-1$, do $\Delta(k)=\Delta(k)-\Delta(j_1)\times\frac{\Delta(i_1,k)}{\Delta(i_1,j_1)}$, for $k = j_2 + 1$ to $k = 2n - 1$, do $\Delta(k) = \Delta(k) - \Delta(j_2) \times \dfrac{\Delta(i_2, k)}{\Delta(i_2, j_2)}$.

这一算法在对高阶矩阵(10 阶以上)进行运算时,可采用下述算法以避免大小数间运算产生过大的误差:

1) 将公式 $\Delta(k) = \Delta(k) - \Delta(i_1) \times \dfrac{\Delta(i_1, k)}{\Delta(i_1, j_1)}$ 替换为:

$$\text{while}\left(\frac{\Delta(i_1, k)}{\Delta(i_1, j_1)} > 10\right), \quad \Delta(j_1) = \Delta(j_1) * 10;$$

$$\text{while}\left(\frac{\Delta(i_1, k)}{\Delta(i_1, j_1)} < 0.1\right), \quad \Delta(j_1) = \Delta(j_1) * 0.1;$$

$$\Delta(k) = \Delta(k) - \Delta(j_1) \times \frac{\Delta(i_1, k)}{\Delta(i_1, j_1)}.$$

2) 将公式 $\Delta(k) = \Delta(k) - \Delta(j_2) \times \dfrac{\Delta(i_2, k)}{\Delta(i_2, j_2)}$ 替换为:

$$\text{while}\left(\frac{\Delta(i_2, k)}{\Delta(i_2, j_2)} > 10\right), \quad \Delta(j_1) = \Delta(j_2) * 10;$$

$$\text{while}\left(\frac{\Delta(i_2, k)}{\Delta(i_2, j_2)} < 0.1\right), \quad \Delta(j_1) = \Delta(j_2) * 0.1;$$

$$\Delta(k) = \Delta(k) - \Delta(j_2) \times \frac{\Delta(i_2, k)}{\Delta(i_2, j_2)}.$$

设 $f_1(x)$ 为 (x_1, x_2) 的齐次多项式,按 x_1 的降幂排列. 为记述方便,以下只列出系数来表示,如 $(1,2,3,-4,5)$ 即为 $x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 3x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3 + 5x_2^4$.

例 2 对于系统 $\dot{x}_1 = f_1 = (-0.325, -0.215, -0.155, -0.235)$, $\dot{x}_2 = f_2 = (0.045, -0.235, -0.185, -0.455)$, 取 $v = (-1.3, -0.86, -0.62)$, 则 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (0.8063, 0.9848, 1.0384, 1.365, 0.7663)$, 这时,相应的 Δ 为:

0.766,	1.365,	1.038,	0.985,	0.806,	0.000,	0.000,
0.000,	0.766,	1.365,	1.038,	0.985,	0.806,	0.000,
0.000,	0.000,	0.766,	1.365,	1.038,	0.985,	0.806,
0.000,	0.000,	0.000,	3.065,	4.095,	2.077,	0.985,
0.000,	0.000,	3.065,	4.095,	2.077,	0.985,	0.000,
0.000,	3.065,	4.095,	2.077,	0.985,	0.000,	0.000,
3.065,	4.095,	2.077,	0.985,	0.000,	0.000,	0.000,

对 Δ 按上述算法进行消元得到:

0.766	1.365	1.038	0.985	0.555	9.036	-0.000
0.000	0.766	1.365	1.038	0.996	0.000	-0.000
0.000	0.000	0.766	1.365	-0.000	0.000	-0.000
0.000	0.000	0.000	3.065	0.000	-0.000	0.000
0.000	0.000	3.065	4.095	-0.253	-0.000	0.000
0.000	3.065	4.095	2.077	2.406	10.941	0.000
3.065	4.095	2.077	0.985	0.812	35.350	-2.510

因此 $\Delta_1 = 3.065$, $\Delta_3 = 0.766 * 3.065 * (-0.253)$, $\Delta_5 = 0.766 * 0.766 * 3.065 *$

$(-0.253)*10.941$, $\Delta_7 = 0.766*0.766*0.766*3.065*(-0.253)*10.941*(-2.510)$. 从而 $N = \mathrm{var}[+--++] - \mathrm{var}[++--+] = 2-2 = 0$. 并且由于 $a_0 = 0.7663$, $a_4 = 0.8063$ 均大于0,故 $\dot{v}(x)$ 正定. 因此 $v = (-1.3, -0.86, -0.62)$ 即可以做为判定函数. 同理可以验证 V 是负定的,从而系统是渐近稳定的.

在测试中,使用根据上述算法所编制的程序对随机产生的 40 个系统,均顺利地找到了相应的李亚普诺夫函数,这表明其效果是良好的.

4　结论与讨论

本文给出了一种判别二维高次齐次非线性临界系统的稳定性的算法,这一算法对中心流形是 2 维高次的系统通过构造李亚普诺夫函数来判稳有良好的效果. 依据这种算法编制成的程序对随机产生的 40 个临界非线性系统,均顺利地找到了相应的李亚普诺夫函数.

参 考 文 献

1 黄琳. 稳定性理论. 北京:北京大学出版社, 1992

2 Lin, Y. and Sontag, E. D.. A universal formula for stabilization with bounded controls. System & Control Letters, 1991, 17 (6):393 - 397

3 Sontag, E. D.. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. System & Control Letters, 1989, 15 (2):117 - 123

4 黄琳, 于年才, 王龙. 李亚普诺夫方法的发展与历史性成就. 自动化学报, 1993, 19(6):587 - 594

5 Chun Wen Li, Yuan Miao, Qing Hai Miao. A method to judge the stability of dynamical system. Proceeding of YAC'95 IFAC, Beijing, 1995

6 Bose, N. K.. Inner algorithm to test for positive definiteness of arbitrary binary forms. IEEE T-AC, 1975, 20(4):169 - 170

7 Jury, E. I.. Inners and stability of dynamic systems. New York: Wiley, 1974

8 Jury, E. I. and Ahn, S. M.. A computational algorithm for inners. IEEE T-AC, 1972, 17(8):541 - 543

9 苗原. 判别非线性系统稳定性的规范判定函数法. 清华大学博士学位论文, 北京, 1996

Stability Determination Algorithm for 2-Dimension High Order Singular System

MIAO Yuan,　LI Chunwen　and　HU Shiwen

(Automation Department, Tsinghua Uniuersity·Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper presents an algorithm for judging stability of 2-dimension high order critical systems. This algorithm has well practical effect. In a test, the computer program of this algorithm found out Lyapunov functions for 40 example systems which were generated in random.

Key words: nonlinear systems; critical systems; stabilitys; Lyapunov functions; Inners algorithm

本文作者简介

苗　原　1992 年于山东大学数学系获学士学位, 1996 年于清华大学自动化系获博士学位. 1993 - 1995 年任清华大学自动控制学会理事. 主要研究兴趣为:非线性系统稳定性,非线性控制系统设计,逆系统方法,神经元网络,模糊控制,柔性机器人,系统仿真,符号推导,计算机局域网.

李春文　1958 年生. 1982 年、1989 于清华大学获得学士、博士学位,现为清华大学教授. 主要研究兴趣为:自动控制理论及应用,非线性控制的逆系统方法,非线性系统仿真及符号 CAD,稳定性的正则判别函数法.

胡世文　1972 年生. 1996 年于清华大学获得学士学位,现为该校研究生. 主要研究兴趣为:自动控制理论及应用,稳定性的正则判别函数法.