第 14 卷第 5 期
1997 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 5
Oct. ,1997

广义预测控制的 deadbeat 性质研究*

张 峻 席裕庚
(上海交通大学自动化研究所·200030)

摘要：本文利用广义预测控制中对象与闭环特征多项式之间的系数映射关系，分析了闭环系统特征多项式系数为零的条件，导出了 GPC 闭环系统 deadbeat 性质完善而新颖的理论结果，并提供了一种基于系数空间映射的新思路来研究 GPC 的性质.

关键词：广义预测控制；特征多项式；deadbeat 控制

1 引 言

广义预测控制(GPC)[1]是 70 年代末蓬勃发展起来的模型预测控制算法的典型代表. 这一算法以 CARIMA 模型为基础，结合了在线辨识和自校正的机制，表现出良好的鲁棒性，有着广泛的适用范围. 近年来，许多学者致力于研究其闭环特性与设计参数之间的关系[2]，尤其是 Clarke 等人利用增量形式的状态空间模型，在 LQ 问题的背景下研究 GPC 的稳定性和 deadbeat 等性质，取得了相当出色的结果[3]，被认为是迄今为止针对一般系统的参数设计导出的最好结果. 本文利用从对象至 GPC 闭环系统特征多项式的系数映射关系，分析了闭环系统特征多项式系数为零的条件，以此为基础详细讨论了 GPC 系统的 deadbeat 控制问题，大大推广了 Clarke 在文[3]中提出的相应结论，取得了目前已知最好的结果，同时也为有效地分析 GPC 闭环系统特性提供了一种新的途径.

2 GPC 中对象与闭环特征多项式的系数映射关系

GPC 采用如下的 CARIMA 模型：

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \zeta(t)/\Delta, \quad \Delta = 1 - z^{-1}, \tag{1}$$

在上式中，$u(t)$，$y(t)$ 分别为控制输入和输出，$\zeta(t)$ 表示均值为零的白噪声序列，A 和 B 为 z^{-1} 的多项式：

$$B(z^{-1}) = m_1 + m_2 z^{-1} + \cdots + m_n z^{-n+1}, \tag{2}$$

$$A(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}. \tag{3}$$

一般总是假定 A，B 不可约.

在性能指标

$$J(t) = E\left\{\sum_{j=N_1}^{N_2}[y(t+j) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u}\lambda[\Delta u(t+j-1)]^2\right\} \tag{4}$$

下，GPC 的最优控制律为[1]

$$\Delta u(t) = d^{\mathrm{T}}(w + Y_P), \tag{5}$$

其中

$$d^{\mathrm{T}} = (1 \quad 0 \cdots 0)(G^{\mathrm{T}}G + \lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}} \triangleq (d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1}), \tag{6}$$

Y_p 是输入保持不变时的系统未来输出. G 是由阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 组成的动态矩阵：

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1995 年 12 月 11 日收到. 1996 年 6 月 26 日收到修改稿.

$$G=\begin{bmatrix} a_{N_1} & \cdots & 0 & \\ & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ & & & \vdots \\ a_{N_2} & \cdots & \cdots & a_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix} \omega(t+N_1) \\ \vdots \\ \omega(t+N_2) \end{bmatrix}.$$

经过一系列的推导，可以得出 GPC 闭环系统的传递函数如下(为节约篇幅推导略去)：

$$G(z^{-1})=\frac{d_s z^{-1}B(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}, \tag{7}$$

式中
$$d_s=\sum_{i=1}^{N_2-N_1+1} d_i,\quad A_c(z^{-1})=1+p_1^* z^{-1}+\cdots+p_{n+1}^* z^{-(n+1)}.$$

且 $A_c(z^{-1})$ 的系数由下式决定：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ b_{N+1}-1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ b_{N_1+n+1}-b_{N_1+n} & \cdots & \cdots & & b_{N_1+1}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中
$$b_i=\sum_{j=1}^{N_2-N_1+1} d_j a_{i+j-1}.$$

可以看到，此时的 GPC 动态特性取决于闭环系统的特征多项式 $A_c(z^{-1})$，而(8)式正刻划了从对象特征多项式 $A(z^{-1})$ 至 $A_c(z^{-1})$ 的系数映射关系．这一映射关系将是本文研究工作的出发点．为了进一步研究的需要，下面给出几个描述(8)式所刻划的特征多项式系数映射关系基本特性的引理．

引理 2.1[4] 设对象的 z 传递函数为

$$G(z^{-1})=\frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \tag{9}$$

A,B 由(2),(3)分别给出，则对象阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 和 A,B 的系数之间满足：

$$\begin{cases} a_1=m_1, \\ (a_2-a_1)+a_1p_1=m_2, \\ \quad\vdots \\ (a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})p_1+\cdots a_1p_{n-1}=m_n, \\ (a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})p_1+\cdots a_1p_n=0, \\ (a_{i+2}-a_{i+1})+(a_{i+1}-a_i)p_1+\cdots+(a_{i-n+2}-a_{i-n+1})p_n=0,\quad i\geqslant n. \end{cases} \tag{10}$$

引理 2.2 若 $\lambda=0$，G 列满秩，则顺次有下列 N_u 个等式成立：

$$\begin{cases} d_1a_{N_1}+\cdots+d_{N_2-N_1+1}a_{N_2}=1, \\ d_1a_{N_1-1}+\cdots+d_{N_2-N_1+1}a_{N_2-1}=1, \\ \quad\vdots \\ d_1a_{N_1-N_u+1}+\cdots+d_{N_2-N_1+1}a_{N_2-N_u+1}=0. \end{cases} \tag{11}$$

其中
$$a_j=0,\quad \forall\, j\leqslant 0.$$

本引理可由式(6)直接导出．

3 GPC 的 deadbeat 性质

众所周知，deadbeat 控制系统的闭环传递函数具有如下的形式：

$$G_d(z^{-1}) = l_1 z^{-1} + \cdots l_p z^{-p},$$

所以在 p 个采样周期之后，系统的脉冲响应将变为零，从而意味着系统在 p 拍之后即达到稳态．由 GPC 的闭环传递函数(7)式可知，若 $A_c(z^{-1}) = 1$，则 GPC 系统必然具有 deadbeat 性质．所以对于 GPC 系统的 deadbeat 性质．只须研究何时闭环系统特征多项式系数全为零即可．首先考虑如下简单的情况．

命题 3.1 对于 n 阶系统，若 $\lambda = 0$，G 列满秩，则 $p_{n+1}^* = 0$.

证 由已知条件和引理 2.2 可知

$$b_{N_1} = d_1 a_{N_1} + \cdots d_{N_2-N_1+1} a_{N_1} = 1.$$

所以

$$p_{n+1}^* = (b_{N_1+n+1} - b_{N_1+n} \ \cdots \ b_{N_1+1} - 1)\boldsymbol{p}$$

$$= (d_1 \ \cdots \ d_{N_2-N_1+1}) \begin{bmatrix} a_{N_1+n+1} - a_{N_1+n} & \cdots & a_{N_1+1} - a_{N_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_2+n+1} - a_{N_2+n} & \cdots & a_{N_2+1} - a_{N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

利用引理 2.1 即有 $p_{n+1}^* = 0$.

命题 3.2 对于 n 阶系统，若 $\lambda = 0$，G 列满秩，且 $N_u > 1$，则 $p_n^* = 0$.

证 由引理 2.2 可知

$$b_{N_1} = 1, \quad b_{N_1-N_u+1} = \cdots = b_{N_1+1} = 0. \tag{12}$$

$$p_n^* = (b_{N_1+n} - b_{N_1+n-1} \ \cdots \ b_{N_1-1} - 1 \ \ 1)\boldsymbol{p}$$

$$= (b_{N_1+n} - b_{N_1+n-1} \ \cdots \ b_{N_1-1} - b_{N_1} \ \ b_{N_1} - b_{N_1-1})\boldsymbol{p}$$

$$= (d_1 \ \cdots \ d_{N_2-N_1+1}) \begin{bmatrix} a_{N_1+n} - a_{N_1+n-1} & \cdots & a_{N_1+1} - a_{N_1} & a_{N_1} - a_{N_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_2+n} - a_{N_2+n-1} & \cdots & a_{N_2+1} - a_{N_2} & a_{N_2} - a_{N_2-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

由引理 2.1 有 $p_n^* = 0$. 证毕．

以上两个命题依次给出了在一定设计参数选取条件下 $A_c(z^{-1})$ 系数为零的有用结果，将其推广之，可以得到如下具有一般性的重要定理．

定理 3.1 对于 n 阶系统，若 $\lambda = 0$，G 列满秩，且 $N_1 \geqslant n + 1 - i$，$N_u \geqslant n + 2 - i$，则

$$p_i^* = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1.$$

证

$$p_i^* = [b_{N_1+i} - b_{N_1+i-1} \ \cdots \ b_{N_1} \ \ \overbrace{0 \cdots 0}^{n-i}]\boldsymbol{p}.$$

在上述定理的条件下，式(12)成立．由 $N_u \geqslant n + 2 - i$，可知 $N_1 + i - n - 1 \geqslant N_1 - N_u + 1$，对照式(12)有 $b_{N_1+i-n-1} = \cdots = b_{N_1-1} = 0$，$b_{N_1} = 1$. 故可得

$$p_i^* = (b_{N_1+i} - b_{N_1-i-1} \ \cdots \ b_{N_1} - b_{N_1-1} \ \cdots \ b_{N_1+i-n} - b_{N_1+i-n-1})\boldsymbol{p}$$

$$= (d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1}) \begin{bmatrix} a_{N_1+i} - a_{N_1+i-1} & \cdots & a_{N_1} - a_{N_1-1} & \cdots & a_{N_1+i-n} - a_{N_1+i-n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N_2+i} - a_{N_2+i-1} & \cdots & a_{N_2} - a_{N_2-1} & \cdots & a_{N_2+i-n} - a_{N_2-+i-n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

又因为 $N_1 \geqslant n+1-i$，故 $N_1+i-n-1 \geqslant 0$，利用引理 2.1 即有 $p_i^* = 0$.

本定理给出了 $p_i^* = 0$ 的条件，若 $p_1^* = \cdots = p_{n+1}^* = 0$，则 $A_c(z^{-1}) = 1$，GPC 闭环系统即为 deadbeat 控制，故可得：

推论 3.1 对于 n 阶系统，若 $\lambda = 0$，G 列满秩，$N_1 \geqslant n$，$N_u \geqslant n+1$，则 GPC 表现为 deadbeat 控制，且不论如何选择 N_1 和 N_u，此时系统的动态特性均相同．

证 对所有 $i = 1,2,\cdots,n-1$，$N_u \geqslant n+2-i$，$N_1 \geqslant n+1-i$ 均成立，所以由定理 3.1，有 $p_1^* = \cdots = p_{n-1}^* = 0$ 成立．此外，由命题 3.1 可知 $p_{n+1}^* = 0$，又由命题 3.2，因为 $N_u \geqslant n+1 \geqslant 2$，可知 $p_n^* = 0$. 所以 $A_c(z^{-1}) = 1$，$G(z^{-1}) = d_s m(z^{-1})$ 即 GPC 为 deadbeat 控制．又由(8)式可得：$1 + p_1^* + \cdots + p_{n-1}^* = d_s B(1)$，因为现在 $p_1^* = \cdots = p_{n-1}^* = 0$，故 $d_s = 1/B(1)$，$G(z^{-1}) = z^{-1}B(z^{-1})/B(1)$ 所以闭环系统总具有相同的动态特性，与参数选择无关．

在上述讨论中，均需要条件 G 列满秩，这是为了保证 $(G^{\mathrm{T}}G)$ 可逆并使式(11)成立．所以若能由 N_1，N_2，N_u 等设计参数直接给出 G 列满秩的条件，就可得出关于 deadbeat 控制更为直接的结论．由 GPC 系统的可解性问题讨论(另有专文研究)有以下引理成立．

引理 3.1 对于 n 阶系统，若

1) $N_u \leqslant n+1$，$N_2 \geqslant N_1 + N_u - 1$，或

2) $N_u > n+1$，$N_1 = n$，$N_2 \geqslant N_u + n - 1$ 且 $m_n \neq 0$ 时，则 G 必定列满秩．

由上述引理以及推论 3.1，最终我们有以下有关 GPC 闭环系统 deadbeat 性质的定理，这是本文所取得的最主要的结果．

定理 3.2 对于 n 阶系统，GPC 控制器在如下条件为 deadbeat 控制器：

i) $\lambda = 0$，$N_u = n+1$，$N_1 \geqslant n$，$N_2 \geqslant N_1 + n$，或

ii) $\lambda = 0$，$N_u \geqslant n+2$，$N_1 = n$，$N_2 \geqslant N_u + n - 1$ 以及 $m_n \neq 0$，并且此时闭环系统总具有相同的动态特性．

注释 3.1 1) Clarke 等在文[3]提出，当 $\lambda = 0$，$N_u = n+1$，$N_1 = n+1$，$N_2 \geqslant 2n+1$ 时，GPC 即为一 deadbeat 控制器($n+1$ 是增量形式状态空间模型的阶数)，在此后的文献中也未有更好的结果出现．将该结论和本文定理 3.2 比较可见，定理 3.2 中的第一个条件即大大加强了文[3]的结论，而第二个条件则是一个尚未见诸文献的新结果．

2) DMC 的最小化控制器 $G_c(z^{-1})$ 具有与 GPC 相同的形式[5]，故本节的结论也适用 DMC 系统的闭环性质分析．

3) 由于此时闭环系统的传递函数为：

$$G(z^{-1}) = (m_1 z^{-1} + \cdots + m_n z^{-n}) / \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

所以系统的阶跃响应可以精确地求出，并且只取决于对象的分子多项式．这样，不仅得到了 deadbeat 控制参数选取的条件，而且还可以求得系统的闭环响应，并且知道其动态特性是与以上的参数选择无关的，这也是文[3]基于 LQ 问题的讨论未能得出的结论．

4 仿真研究

考虑四阶对象

$$G(z^{-1}) = \frac{0.3728z^{-1} + 1.9069z^{-2} + 1.7991z^{-3} + 0.3080z^{-4}}{1 + 1.2496z^{-1} + 0.4746z^{-2} + 0.9364z^{-3} + 0.7261z^{-4}},$$

采样间隔 $\tau = 0.2\mathrm{s}$，因为 $n = 4$，故由文[3]的结果，取 $\lambda = 0$，$N_u = 5$，$N_1 = 5$，$N_2 \geqslant 9$ 时，GPC 表现为 deadbeat 控制．其动态响应和控制量分别如图 1 所示．

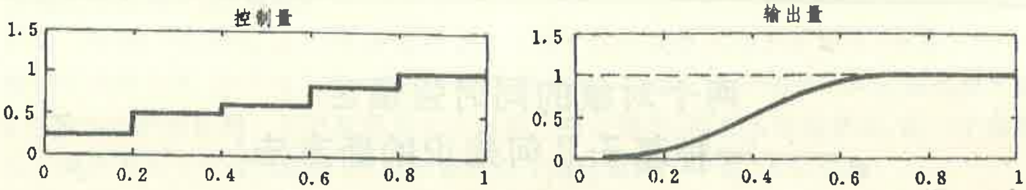

图 1 仿真实例

由本文的结论,我们可以选取设计参数如右表所示:

仿真结果表明,此时 GPC 均表现为 deadbeat 控制,且其动态响应和控制量与图 1 相同,从而证明了本文结论的正确性.

表 1 本文的参数选取

λ	N_1	N_2	N_u
0	$\geqslant 4$	$\geqslant N_1+4$	5
0	4	$\geqslant N_u+3$	$\geqslant 6$

5 结 论

本文利用 GPC 闭环描述,分析了对象的 deadbeat 控制问题,给出了通过适当选取设计参数使得 GPC 闭环系统具有 deadbeat 性质的结论,从而推广了文献中已有的结论,并取得了目前已知最好的结果,本文的理论证明过程采用的是一种统一的方法,为进一步研究提供了有益的思路.

参 考 文 献

1 Clarke,D. W.,Mohtadi,C. and Tuffs,P. S.. Generalized predictive control. Part 1 and 2. Automatica,1987,23(1):137—160

2 McIntosh, A. R.,Shah,S. L. and Fisher,D. G.. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. The Canadian Journal of Chemical Engineering. 1991,69(1):97—110

3 Clarke,D. W. and Mohtadi,C.. Property of generalized predictive control. Automatica,1989,25(6):859—875

4 席裕庚,厉隽怿. 广义预测控制系统的闭环分析. 控制理论与应用,1991,8(4):419—424

5 Xi Y. G.. Minimal form of a predictive controler based on the step-response model. Int. J. Control,1989,49(1):57—64

Study on Deadbeat Properties in Generalized Predictive Control

ZHANG Jun and XI Yugeng

(Institute of Automation,Shanghai Jiao Tong University · 200030,PRC)

Abstract: In this paper,by using the coefficient mapping relationship between plant and closed-loop characteristic polynomial,the conditions on zero coefficients of characteristic polynomial are analyzed. Complete and new theoretical results on deadbeat properties of GPC are derived. It also provides a new way based on coefficient mapping to study the properties of GPC systems.

Key words: generalized predictive control; characteristic polynomial; deadbeat control

本文作者简介

张 峻 1971 年生. 1993 年在上海交通大学自动控制系获学士学位,现为上海交通大学自动化研究所博士研究生. 目前主要研究方向为预测控制的理论研究.

席裕庚 见本刊 1997 年第 4 期第 594 页.