第 14 卷第 5 期
1997 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 5
Oct., 1997

两个对象的同时强镇定
——一种基于几何知识的新方法*

程储旺　孙优贤　郭朝辉
(浙江大学工业控制技术研究所·杭州,310027)

摘要：本文用直观的几何知识研究两个对象的同时强镇定问题．得到了两个对象可同时强镇定的一个必要条件,并给出直接寻找同时强镇定两个对象控制器的方法．最后的算例说明了本文方法是快速有效的．

关键词：同时镇定；强镇定；交点；有界性

1 引　言

同时镇定问题是控制理论及应用中非常重要的问题．1976 年 Youla[1]最先给出镇定一个对象控制器的参数化形式,但 2 个以上对象的同时强镇定问题也即 3 个以上对象的同时镇定问题至今尚未解决．直至 1982 年才由 Saeks R. and Murray J.[2]和 Vidyasagar M. and Viswanadhan N.[3]等从事这一研究工作．之后,很多作者[4~7]对此作了大量的研究工作．1993 年 Blondel, V. and Gevers M.[8]证明了有限次加、减、乘、除、逻辑运算和不等式等不能解决 3 个以上对象的同时镇定问题．然而,在工业实践中经常要同时镇定多个对象,所以我们必须用其它方法如逼近方法、几何方法等进行研究．本文用直观的几何进行研究,得到了两个对象可同时强镇定的一个必要条件,在此基础上给出直接寻找控制器的方法,该方法有直观的几何背景,应用此法可以方便快速地找到低阶控制器(如果存在的话)．文末给出的例子表明了本文方法的有效性．

2 主要结果

定理 1　设 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 是正则,实有理的传递函数,则 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 可同强镇定的必要条件是：1) $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 可强镇定；2) 当 $s\in\mathbb{R}^+$ 时,$P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 的图象没有交点；或 3) 若 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 的图象有交点 s_0,令 s_1 和 s_2 分别为 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 在与 s_0 相同分支中的实零点(如果存在的话；若有两个,取其中一个),则 $\lim\limits_{s\to s_1}(-P_1^{-1}(s))$ 与 $\lim\limits_{s\to s_2}(-P_2^{-1}(s))$ 同号．

证　条件 1) ～ 2) 是显然的．下面考虑 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 的图象有交点 s_0 的情形．假设 s_0 在 $P_1(s)$ 和\或 $P_2(s)$ 两个实零点中间或某个实零点左边,即在 $-P_1^{-1}(s)$ 和\或 $-P_2^{-1}(s)$ 两个实极点中间或某个实极点左边．此时 $-P_1^{-1}(s)$ 和 $-P_2^{-1}(s)$ 对应部分的图象类似如图 1 或图 2,则 $P_1(s)$ 或 $P_2(s)$ 必不能同时强镇定．因为用于强镇定 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 的控制器是稳定的,它对应于 $s\in\mathbb{R}^+$ 部分的图象必有界,所以必与 $-P_1^{-1}(s)$ 和\或 $-P_2^{-1}(s)$ 的图象相交．另一方面,如果存在控制器 $c(s)$ 同时强镇定 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$,则对应的闭环系统的特征多项式在闭右半平面(RHP)内没有零点,即当 $\mathrm{Re}\,s\geqslant 0$ 时,成立：

$$c(s)\neq -P_1^{-1}(s)\quad\wedge\quad c(s)\neq -P_2^{-1}(s),$$

亦即 $c(s)$ 与 $-P_1^{-1}(s)$ 和 $-P_2^{-1}(s)$ 图象在闭 RHP 没有交点．两相矛盾．

* 国家自然科学基金资助项目．
本文于 1995 年 12 月 13 日收到．1996 年 9 月 26 日收到修改稿．

其他情形很简单，证明从略.

说明 定理 1 的条件 1）只要根据强镇定定理[6]检查零极点的关系即可，条件 2）～3）只须检验符号和解方程，应用很方便，此外，定理的证明只考虑了部分情形，其它如将图 2 旋转 180 度等情形可类似证明. 不过实际系统大都是严格正则的，即有无穷远零点，在一个有限正实零点右侧没有其它实零点的情形（其图象对应于图 2 旋转 180 度）不会出现.

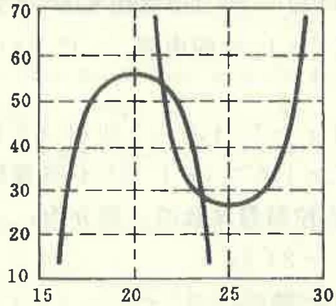

图 1 两对象交点在两实零点中间

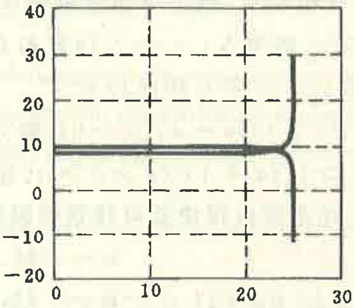

图 2 两对象交点在某实零点左边

设 $c(s)$，$P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 是正则、实有理的，将它们表示成互质多项式的比：

$$c(s)=\frac{n_c(s)}{d_c(s)},\quad P_i(s)=\frac{n_i(s)}{d_i(s)},\quad (i=1,2).$$

则有：

定理 2 $c(s)$ 可同时强镇定 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 的充分必要条件是由下列方程组成的方程组的解均有负实部：

$$n_c(s)n_i(s)+d_c(s)d_i(s)=0,\quad s\in\mathbb{R}^+\quad i=1,2, \tag{2.1}$$

并且 $d_c(s)=0$ 的根均有负实部.

证 由文[6]可立即导出，故从略.

定理 2 是平凡的，应用比较困难，但对我们构造同时强镇定控制器却很有帮助.

由以上分析可得同时强镇定控制器的构造步骤如下：

1）检验定理 1 的条件是否满足，若满足，继续；否则转 5）；

2）用最简单的控制器和最简单的传递函数代入(2.1)，求出能强镇定选定对象的控制器参数的范围；

3）在 2）求出的范围内找出能强镇定另一个对象的控制器参数的范围，成功，转 5）；否则，继续；

4）增加控制器的复杂性（如将 $c(s)=b/(s+a)$ 换为 $c(s)=(bs+c)/(s+a)$，或者增加控制器的阶次），转 2）；

5）退出.

我们研究过很多对象，此法简单实用.

3 算 例

例 1 给定两个对象的传递函数为：

$$P_1(s)=\frac{(s-1)(s-8)}{(s-4)(s-6)},\quad P_2(s)=\frac{(s-1)(s-9)}{(s-4)(s-8)}.$$

显然 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 均可强镇定，$-P_1^{-1}(s)$ 和 $-P_2^{-1}(s)$ 在闭 RHP 有交点 $s=4$，$-P_1^{-1}(s)$ 在与 $s=4$ 的同一分支中的极点为 $s=1,8$（取其中一个 $s=1$），$-P_1^{-1}(s)$ 在 $s=1$ 的右极限为

正无穷大，$-P_2^{-1}(s)$在与$s=4$的同一分支中的极点为$s=1,9$(取其中一个$s=1$)，$-P_2^{-1}(s)$在$s=1$的右极限为负无穷大，两者符号相反，所以已知两对象不能同时强镇定.

例2 考察下列对象[6].

$$P_1(s)=\frac{1}{s-1},\quad P_2(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2}.$$

1) $P_1(s)$和$P_2(s)$满足可强镇定条件[6]，$-P_1^{-1}(s)$和$-P_2^{-1}(s)$在闭RHP有交点$s=3/2$，分别位于$P_1(s)$的零点$s=\infty$左边界和$P_2(s)$的零点$s=1,\infty$的中间，$-P_1^{-1}(s)$在$s=\infty$和$-P_2^{-1}(s)$在$s=\infty$符号相同均为"-".

2) 取$c(s)=b/(s+a)(a>0)$，解方程：$(s+a)(s-1)+b=0$知$c(s)$可强镇定$p_1(s)$的条件为：$a>1,(a+1)^2/4\geqslant b>a$(有实根)；或$a>1,b>(a+1)^2/4$(有虚根).

3) 在上述范围内很快就可找到能强镇定$P_2(s)$的控制器参数的一部分为：

$$a=6\text{ 时},\quad b=21.5\sim 23.5, \tag{3.1}$$

$$a=7\text{ 时},\quad b=25.5\sim 27.5, \tag{3.2}$$

所以，只要a和b满足(3.1)或(3.2)则$c(s)=b/(s+a)$类型的控制器可同时强镇定$P_1(s)$和$P_2(s)$，当然可能还有其它的控制器可同时强镇定$P_1(s)$和$P_2(s)$. 此例在文[6]中亦有研究，得到的结果是：$a=7,b=27$. 由此可见本文方法的优越性.

4 结 语

本文以直观的几何知识为基础研究同时强镇定问题，使得有关问题一目了然，并得到两个对象可同时强镇定的必要条件，在此基础上提出一个新的直接寻找控制器的方法，此方法可以方便快速地找到低阶控制器(如果存在的话). 本文的方法很直观，对同时镇定问题的研究将有所帮助.

致谢 张卫东博士和皮道映博士对本文的写作提出了许多有益建议，特此致谢.

参 考 文 献

1 Youla, D. C. et al.. Modern wiener-hopf design of optimal controllers—Part Ⅱ: the multivariable case. IEEE Trans. Automat. Contr, 1976, AC-21(1): 75—93

2 Saeks, R. and Murray, J.. Fractional representation, algebraic genoetry, and the simultaneous stabilization problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27(4): 895-903

3 Vidyasagar, M. and Viswanadham. N.. Algebraic design techniques for reliable stabilization, IEEE Trans. Automat. Contr. 1982, AC-27(5): 1085—1095

4 Ghosh, B. and Byrnes, C.. Simultaneous stabilization and pole-placement by nonswitching dynamic compensation, IEEE Trans. Automat. Contr, 1983, AC-28(6): 735—741

5 Obinata, G. and Moore, J.. Characterization of controllers in simultaneous stabilization. Syst. Contr. Lett., 1988, 10: 333—340

6 Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R.. Feedback control theory. Macmllian Publishing Company, NY, 1992

7 Blondel, V., Campion, G. and Gevers, M.. A Sufficient condition for simultaneous stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr. 1993, AC-38(8): 1264—1266

8 Blondel, V. and Gevers, M.. Simultaneous stabilizabity of three linear systems is rationally undecidable. Math Contr. Syst., 1993, (6): 135—145

Simultaneously Strong Stabilization of Two Plants ——A New Approach Using Geometric Terms

CHENG Chuwang, SUN Youxian and GUO Zhaohui

(Institute of Industrial Control Technology of Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: This paper deals with the problem of simultaneously strong stabilization using geometric terms. A necessary condition for two plants to be strongly stabilizable simultaneously is obtained, and a way of finding the strongly stabilizing controller is presented. Finally, two examples show the effectiveness of our new method.

Key words: simultaneous stabilization; strong stabilization; intersect point; boundary

程储旺　1965 年生．1994 年于杭州大学数学系几何专业获硕士学位，现为浙江大学工业控制技术研究所博士生．目前主要研究兴趣：同时镇定，(线性/非线性)时滞系统的鲁棒/H_∞控制等．

孙优贤　见本刊 1997 年第 1 期第 41 页．

郭朝辉　1968 年生．1991 年从浙江大学数学系本科毕业，1994 年于浙江大学化工系获硕士学位，现为浙江大学工业控制技术研究所博士生．目前主要研究兴趣为非线性控制，同时镇定．