

Fuzzy 控制的本质与一类高精度 Fuzzy 控制器的设计*

李洪兴

(北京师范大学数学系·北京, 100875)

摘要: 本文揭示, Fuzzy 控制器在本质上就是某种插值器. 首先阐明 Fuzzy 控制的插值机理, 然后讨论常用的双输入单输出分片插值器, 最后介绍基于论域收缩的一类高精度 Fuzzy 控制器的设计思想.

关键词: Fuzzy 控制; 插值器; 变论域法

1 Fuzzy 控制的插值机理

F/D 转换器(Fuzzification/Defuzzification 转换器)是 Fuzzy 计算机(见文献[1]~[4])的核心部件, 它的功能是实现图 1 中(a)与(b)之间的变换. Fuzzy 控制器实质上在一定程度上可以实现 F/D 转换器中从(b)向(a)的变换功能.

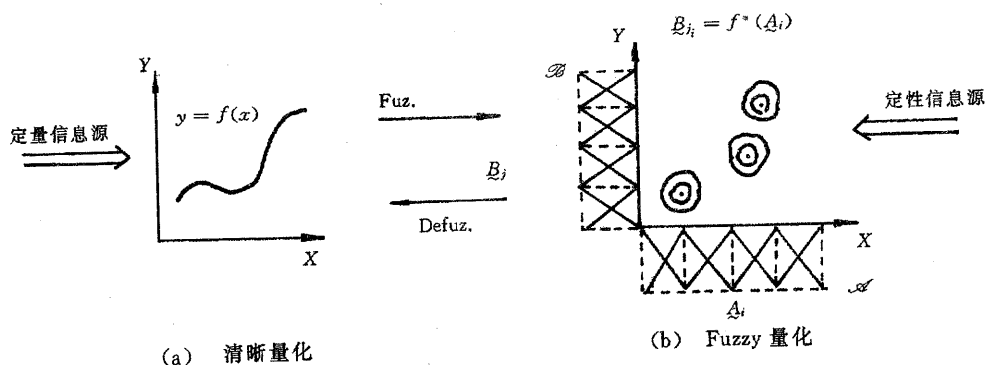


图 1 F/D 转换器

图中 X 与 Y 为普通的欧氏空间(1 维或 n 维), $y = f(x)$ 为 X 到 Y 的(响应)函数; $A_i \in \mathcal{F}(X)$, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{0 \leq i \leq n}$ 相当于把论域 X 作了一个 Fuzzy“划分”; $B_j \in \mathcal{F}(Y)$, $\mathcal{B} = \{B_j\}_{0 \leq j \leq m}$ 为 Y 的 Fuzzy 划分; 映射 $f^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $A_i \mapsto B_j \triangleq f^*(A_i)$ 相当于一组规则: 若 A_i 则 B_j , 即 if x is A_i then y is B_j ; f^* 就是由 Fuzzy 控制规则构成的 Fuzzy 算法器, 这样的具体算法已有多 种模型可供选择(见文献[5, 6]), f^* 是这些模型的概括.

任意给定一个输入 $x \in X$, 经过 Fuzzy 控制器之后, 应当得到一个确切的响应值 $y \in Y$; 如何获得 y , 称之为清晰化(狭义的 Defuzzification), 实现的方法亦不少(如重心法等, 见文献 [7]).

为了方便, 先来明确几个概念. 给定论域 X , X 上的正规 Fuzzy 集又可形象地称为正规峰集. 设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{0 \leq i \leq n}$ 为 X 上一族正规峰集, 峰点为 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ (即满足 $A_i(x) = 1$ 的点), 称 \mathcal{A} 为 X 的一个 Fuzzy 划分, 如果满足条件: 1) $(\forall i, j) (i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$; 2) $(\forall x \in X) (\sum_{i=0}^n A_i(x) = 1)$. 其中每个 A_i 都叫做 \mathcal{A} 的一个基元, 从而亦可称 \mathcal{A} 为 X 的一个基元组.

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 8 月 8 日收到, 1996 年 10 月 3 日收到修改稿.

特别,称 \mathcal{A} 的 X 的一个二相基元组,如果对任意 $x \in X$,至多存在 \mathcal{A} 的两个相邻的基元 A_i 与 A_{i+1} ,使得 $A_i(x) \neq 0 \neq A_{i+1}(x)$. 不难验证 \mathcal{A} 具有这样两个性质: 1) $(\exists \lambda \in (0, 1])(\bigcup_{i=0}^n (A_i)_\lambda = X)$; 2) 若 \mathcal{A} 为 X 上的一个二相基元组,则存在且至多存在两个相邻的基元 A_i 和 A_{i+1} ,使得 $A_i(x) + A_{i+1}(x) = 1$.

注 当 $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (\mathbb{R} 为实数域) 时,总假定 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

现在考虑清晰化问题. 设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{0 \leq i \leq n}$, $\mathcal{B} = \{B_j\}_{0 \leq j \leq m}$ 分别为 X 和 Y 的基元组. 为了清晰化,将映射 $f^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, A_i \mapsto f^*(A_i) \triangleq B_j$, 改变为下述映射:(仍记为 f^*):

$$f^* : \mathcal{A} \rightarrow Y^*, A_i \mapsto f^*(A_i) \triangleq y_j. \tag{1.1}$$

其中 $Y^* = \{y_j | y_j \text{ 为 } B_j \text{ 的峰点}, 0 \leq j \leq m\}$. 对任何 $x \in X$,它对基元 A_i 的隶属度 $A_i(x)$ 视为命题“ x is A_i ”的真值,将该真值传到 A_i 的对应值 y_j ; 于是, x 究竟对应什么(响应)函数值 $y \in Y$,可以这样来回答:若 x 对 A_i 的真值是 1,而对其它基元的真值是 0,那么 x 所对应的值应当是 $y_j, i = 0, 1, \dots, n$. 一般地,当 x 对于 A_i 的真值为 $A_i(x)$,将该真值传到 y_j ,自然不能绝对地取 y_j ,应该对取 y_j 有一个“允许度”,这个允许度又不能高过真值 $A_i(x)$,最方便的方法是把 $A_i(x)$ 作为权重“附于” y_j ,即 $A_i(x)y_j, i = 0, 1, \dots, n$. 综合起来, x 所对应的(响应)函数值 y 可通过加权平均近似地取为下述的 $F(x)$:

$$y = F(x) \triangleq (A_0(x)y_{j_0} + A_1(x)y_{j_1} + \dots + A_n(x)y_{j_n}) / (A_0(x) + A_1(x) + \dots + A_n(x)).$$

该式便是常用的一种清晰化形式. 注意前面已述: $\sum_{i=0}^n A_i(x) = 1$, 因此上式应为 $F(x) =$

$$\sum_{i=0}^n A_i(x)y_{j_i}.$$

不失一般性,基元组 \mathcal{B} 可取为 $\{B_{j_0}, B_{j_1}, \dots, B_{j_n}\}$ 并用 i 代换 j_i , 于是 $\mathcal{B} = \{B_i\}_{0 \leq i \leq n}$. 这样, $F(x)$ 可以写为更为简洁的形式:

$$F(x) = \sum_{i=0}^n A_i(x)y_i. \tag{1.2}$$

不难看出,(1.2)式决定的函数 $F(x)$ 是某种插值函数,它是对理想中的响应函数 $f(x)$ 的一种逼近. 特别,当 $A_i(x)$ 取为“三角波”形函数时, $F(x)$ 为分段线性插值函数. 从插值的观点看, Fuzzy 控制可以描述为:已知 $n + 1$ 个误差和控制量的点

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \tag{1.3}$$

在 $[a, b] = [x_0, x_n]$ 上寻找一组基 A_0, A_1, \dots, A_n , 它们将 $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ 作为其峰点,按(1.2)式作出插值函数 $F(x)$,使其作为理想中响应函数 $f(x)$ 的近似. 实际上,如果我们总结出控制规则,也就得到了基元组 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} ,其中基元的峰点便构成了由(1.3)式表达的数据;反之亦然. 换言之,总结控制规则与得到数据(1.3)是等效的. 因此可以说 Fuzzy 控制器就是插值器.

2 双输入单输出分片插值器

表 1 控制规则表

在 Fuzzy 控制中,双输入单输出是常见的情形,这两个输入常取作误差和误差变化率. 设 $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 为误差 x 的论域, $Y = [c, d] \subset \mathbb{R}$ 为误差变化率 y 的论域, $Z = [p, q] \subset \mathbb{R}$ 为控制量 u 的论域;理想的响应函数为 $u: X \times Y \rightarrow Z, (x, y) \mapsto u(x, y)$. 从实际问题中总结出的控

	B_0	B_1	...	B_m
A_0	ζ_{11}	ζ_{12}	...	ζ_{1m}
A_1	ζ_{21}	ζ_{22}	...	ζ_{2m}
	...			
A_n	ζ_{n1}	ζ_{n2}	...	ζ_{nm}

制规则分别将 X, Y 作出 Fuzzy 划分: $\mathcal{A} = \{A_i\}_{0 \leq i \leq n}, \mathcal{B} = \{B_j\}_{0 \leq j \leq m}$; 它们相应的峰点集分别为 $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}, \{y_j\}_{0 \leq j \leq m}$. 控制规则可表示为表 1 的形式.

该表中 $C_{ij} \in \mathcal{F}(Z)$ 为控制量 Fuzzy 集. 表 1 形成了一组推理: “若 A_i 且 B_j 则 C_{ij} ” 即 if x is A_i and y is B_j then u is C_{ij} . 用一个函数来表达更为简洁:

$$u^*: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \quad (A_i, B_j) \mapsto u^*(A_i, B_j) \triangleq C_{ij}.$$

其中 $\mathcal{C} = \{C_{ij} | 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$. 设 C_{ij} 的峰点为 $u_{ij} \in Z (i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m)$, 那么实际上我们掌握了一组数据: $((x_i, y_j), u_{ij}), i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$. 根据这组数据可以作出一个近似的响应函数 $U(x, y)$. 一种简便易行的实际方法是“乘积型插值法”: 借用一元插值的结果进行逐元插值, 即先固定 x , 将 $u(x, y)$ 视为 y 的一元函数, 用一元插值法得到插值函数, 记之为

$$P_y u(x_i, y) = \sum_{j=0}^m B_j(y) u_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

再对 x 实施插值便得到乘积型分片插值函数:

$$U(x, y) = P_x P_y(x, y) = \sum_{i=0}^n A_i(x) \left(\sum_{j=0}^m B_j(y) u_{ij} \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_i(x) B_j(y) u_{ij}. \tag{2.2}$$

令 $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \triangleq \{A_i \cdot B_j | 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$, 其中 $(A_i \cdot B_j) \in \mathcal{F}(X \times Y); (A_i \cdot B_j)(x, y) \triangleq A_i(x) \cdot B_j(y)$. 称 $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ 为由 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 生成的乘积基元组. 特别, 当 $A_i(x), B_j(y)$ 均取为“三角波”隶属函数时, $U(x, y)$ 为二元分片线性插值器.

3 一类高精度 Fuzzy 控制器的设计思想

由插值得的响应函数 $F(x)$ (以单输入单输出情形为例) 是否充分地逼近真实响应函数 $f(x)$, 要看峰点之间的距离是否充分的小, 这意味着控制规则要相当多, 这对于依赖领域专家知识总结控制规则的 Fuzzy 控制器来说是做不到这一点的. 难怪有人这样评价 Fuzzy 控制: Fuzzy 控制只适用于粗糙控制场合, 对于高精度的控制问题, Fuzzy 控制的效果不理想, 还得依靠经典控制或者 Fuzzy 控制与经典控制相结合的控制.

事实上, 如果抓住 Fuzzy 控制的真谛, 那么 Fuzzy 控制是可以用于许多高精度控制场合的. 的确, 作为插值器的 Fuzzy 控制器, $F(x)$ 要想在“全局” $[a, b]$ 上充分靠近 $f(x)$, 规则数量是要大量增加! 然而控制的目的是要把误差控制在“零点”附近, 这是个“局部”问题! 用全局的方法去解决局部问题势必造成“斧头裁纸”的现象. 注意, 上述的“全局”带有僵化的色彩, 即以规则的不变应误差之万变, 精度当然不会高. 如果扬弃“僵化”的弊病, 采用“变化”的手段, 上述矛盾便可迎刃而解.

仍以单输入单输出 Fuzzy 控制为例简述我们提出的方法. 设输入变量为误差 x , 其初始论域(误差最大变化范围)为 $[-E, E]$, E 为实数; 一般常用七个规则, 即把 $[-E, E]$ 作出如图 2 所示的 Fuzzy 划分.

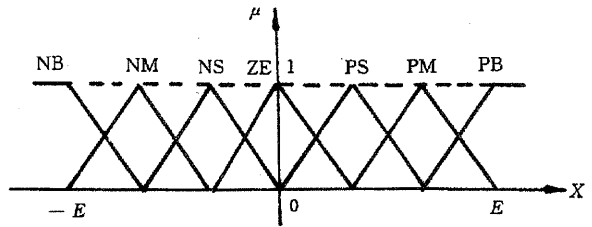


图 2 初始论域及其 Fuzzy 划分

随着控制过程的进行, 误差缩小, 即向零位(ZE)靠近, 若还用图 2 所示的论域及其划分进行推理, 控制结果的精度自然不高; 其原因在于论域 $[-E, E]$ 对于缩小后的误差偏大. 因此我们提出这样一种“可变论域”的思想: 在规则形式(形状)不变的前提下, 论域随着误差变小而收缩(当然亦可随着误差增大而膨胀), 见图 3(a)与(b).

随着控制过程的进行, 误差缩小, 即向零位(ZE)靠近, 若还用图 2 所示的论域及其划分进行推理, 控制结果的精度自然不高; 其原因在于论域 $[-E, E]$ 对于缩小后的误差偏大. 因此我们提出这样一种“可变论域”的思想: 在规则形式(形状)不变的前提下, 论域随着误差变小而收缩(当然亦可随着误差增大而膨胀), 见图 3(a)与(b).

初始论域 $[-E, E]$ 通过“伸缩”因子 $\alpha(x)$ 变换为 $[-\alpha(x)E, \alpha(x)E]$, 其中 $\alpha(x)$ 为误差变量 x 的连续函数: $\alpha: [-E, E] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \alpha(x)$.

$$(3.1)$$

如何确定 $\alpha(x)$ 函数是一个关键环节, 应当说方法很多, 大有“文章”可作. 我们采用分析的方法来考虑 $\alpha(x)$.

任给 x 的一个增量 Δx , 相应地 α 有一个增量 $\Delta\alpha$, 不难理解, $\Delta\alpha$ 与 Δx 成正比; 另一方面, 对于同样大的增量 Δx , 若 x 越大, $\Delta\alpha$ 也应越大; 此外, α 不超过 1, 故 α 越接近 1, $\Delta\alpha$ 应越小; 这样便有增量关系式:

$$\Delta\alpha = k \cdot \Delta x \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha), \tag{3.2}$$

其中 k 为比例常数, 把 Δx 移至左边并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 可得微分方程:

$$\frac{d\alpha}{dx} = kx(1 - \alpha). \tag{3.3}$$

采用分离变量法解这个方程便有 $\alpha(x)$ 的表达式:

$$\alpha(x) = 1 - ce^{-\frac{1}{2}kx^2}. \tag{3.4}$$

其中 c 为积分常数. 注意条件 $\alpha(0) = 0$, 我们有

$$0 = \alpha(0) = 1 - ce^0 = 1 - c \Rightarrow c = 1.$$

另外, 为了方便, 把 $\frac{1}{2}k$ 视为一个参数 k' , 并仍用字母 k 记之, 这样我们有 $\alpha(x)$ 的简洁表达式:

$$\alpha(x) = 1 - e^{-kx^2}. \tag{3.5}$$

其中 k 可作为设计参数, 根据实际控制场合来确定.

显然, 这种可变论域的 Fuzzy 控制器, 其控制效果大为改善, 它以论域的“万变”应误差之“万变”, 达到控制在某一点“不变”之效果, 适合高精度控制的场合.

不难理解, 虽然只给出初始论域上七条规则, 但是通过论域的压缩, 过七条规则会“生成”任意多条规则, 从而插值结点的距离 $h_i = x_{i+1} - x_i$ 会充分的小, 自然插值精度会满足事先任意给定的 $\epsilon > 0$, 当然该精度只就一点(零点)而言的, 从而只是局部的收敛性, 而这对控制来讲是足够的.

另外, 读者会发现, 在可变论域的观点之下, Fuzzy 控制器的设计几乎无需“精明的”领域专家知识, 只要知道规则的大致趋势, 如“若 x 正大, 则 y 正大”; 若 x 正中, 则 y 正中”; ……等等, 就可以了. 此外, 论域的划分, 隶属函数的形状等事情, 在论域压缩之下已显得无关紧要了, 比如可采用等距划, 三角形(即线性)隶属函数便够用了. 再有, 规则的个数多则无用反而无益; 取 3 个, 5 个, 7 个即可; 若去掉中间的“ZE”, 可取 2 个, 4 个, 6 个均可.

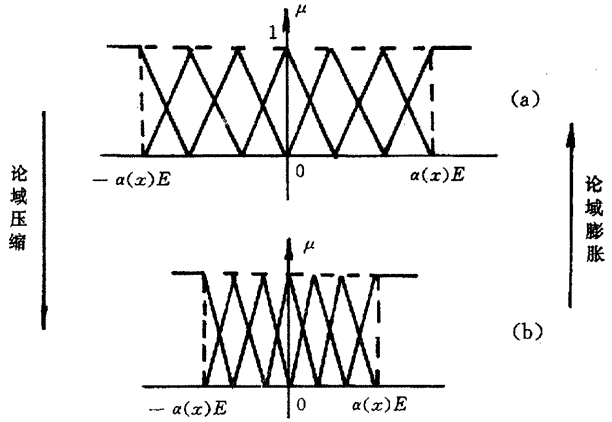


图 3 论域的压缩与膨胀

参 考 文 献

1 汪培庄, 李洪兴. Fuzzy 计算机的设计思想(I). 北京师范大学学报(自然科学版), 1995, 31(2): 189-196

- 2 汪培庄,李洪兴. Fuzzy 计算机的设计思想(II)(III). 北京师范大学学报(自然科学版),1995,31(3):301-312
- 3 汪培庄,李洪兴. Fuzzy 计算机的设计思想(IV). 北京师范大学学报(自然科学版),1995,31(4):434-439
- 4 汪培庄,李洪兴. 知识表示的数学理论. 天津:天津科学技术出版社,1994
- 5 王学慧,田成方. 微机模糊控制理论及其应用. 北京:电子工业出版社,1987
- 6 李洪兴,汪群,段钦治,雪家雄. 工程模糊数学方法及应用. 天津:天津科学技术出版社,1993
- 7 汪培庄,李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京:科学出版社,1996
- 8 李洪兴,汪培庄. 模糊数学. 北京:国防工业出版社,1994
- 9 陈永义. 模糊控制技术及应用实例. 北京:北京师范大学出版社,1993
- 10 Li Hongxing and Yen, V. C. . Fuzzy Sets and Fuzzy Decision Making. Boca Raton: CRC Press, 1995

The Essence of Fuzzy Control and a Kind of Fine Fuzzy Controller

LI Hongxing

(Department of Mathematics, Beijing Normal University • Beijing, 100875, PRC)

Abstract: This paper shows that a fuzzy controller is in essence an interpolator. First, the mechanism of fuzzy control is expounded. Then the piecewise interpolators with 2-input/1-output are discussed in detail. At last a kind of fine fuzzy control is introduced.

Key words: fuzzy control; interpolator; variable universe

本文作者简介

李洪兴 1953年生.先后毕业于南开大学数学系与北京师范大学数学系,获理学博士学位,现任北京师范大学数学系教授,博士生导师,国家模糊控制专业实验室副主任.出版著作6部,在国内外发表论文60余篇.主要研究方向为模糊系统与人工智能,模糊控制,神经网络,超代数结构以及知识表示的数学理论.