

广义预测控制系统的若干稳定性结果*

张 峻 席 裕 庚

(上海交通大学自动化研究所·上海, 200030)

摘要:本文利用广义预测控制在内模控制结构下从对象至闭环特征多项式的系数映射关系, 讨论了在一定参数选取条件下系统闭环稳定性的问题, 并给出了根据阶跃响应系数确保稳定性的参数设计条件。

关键词: 广义预测控制; 系数映射; 闭环稳定性

1 引言

近年来, 预测控制作为一种先进的计算机控制策略, 已经在各种复杂的工业过程控制中获得了巨大的成功^[1]. 与此同时, 有关预测控制的理论研究也取得了相当的进展^[2]. 但在稳定性方面, 尚缺乏十分有效的结果. 因此有关稳定性的讨论便成为预测控制研究中的一个热点.

在众多的预测控制算法中, 广义预测控制(GPC)^[3]以其包含了较多的设计参数以及可根据需要设计各类滤波器而成为许多其它预测控制算法的超集. 目前有关预测控制的稳定性研究很多都是以 GPC 算法为基础进行的, 这样得到的结论对于很多别的算法也同样适用. 本文以内模控制结构^[4]下从对象至闭环系统特征多项式的系数映射关系为基础, 分析了在一定设计参数选择条件下 GPC 算法的稳定性问题, 并针对阶跃响应系数具有递增性和上凸性的系统给出了保证稳定性的参数设计条件, 从而为此类系统的预测控制器设计提供了有益的导引.

2 IMC 结构下的 GPC 闭环描述

在本节中, 我们给出 GPC 在内模控制结构下的表达式, 建立起开闭环系统特征多项式之间的系数映射关系, 这是本文研究工作的基础.

GPC 采用如下的 CARIMA 模型:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \xi(t)/\Delta, \quad \Delta = 1 - z^{-1}. \quad (1)$$

上式中, $u(t)$, $y(t)$ 分别为控制输入和输出, $\xi(t)$ 表示均值为零的白噪声序列, A 和 B 为 z^{-1} 的多项式:

$$B(z^{-1}) = m_1 + m_2 z^{-1} + \dots + m_n z^{-n+1}, \quad (2)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}, \quad (3)$$

一般总是假定 A, B 不可约.

考虑性能指标

$$J(t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} [y(t+j) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\}. \quad (4)$$

其中 $\omega(t+j)$ 是从当前输出 $y(t)$ 至设定值 ω 的参考轨迹:

$$\omega(t) = y(t), \quad \omega(t+j) = \alpha \omega(t+j-1) + (1-\alpha) \omega.$$

为简化讨论, 不妨假设 $\alpha=0$.

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 12 月 26 日收到, 1996 年 9 月 24 日收到修改稿.

GPC 的最优控制律由下式给出^[3]:

$$\Delta u(t) = d^T(w - Y_p).$$

其中

$$d^T = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T \triangleq (d_1 \ \cdots \ d_{N_2-N_1+1}).$$

Y_p 是输入保持不变时的系统未来输出. G 是由阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 组成的动态矩阵

$$G = \begin{bmatrix} a_{N_1} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N_2-N_1+1} \end{bmatrix}, \quad w = [\omega(t+N_1) \ \cdots \ \omega(t+N_2)]^T.$$

我们给出如下引理, 在下面的推导中将会用到.

引理 2.1 设对象的 z 传递函数为

$$G_p(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (5)$$

A, B 分别由(2)、(3)给出, 则对象阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 和 A, B 的系数之间满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = m_1, \\ (a_2 - a_1) + a_1 p_1 = m_2, \\ \vdots \\ (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) p_1 + \cdots + a_1 p_{n-1} = m_n, \\ (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) p_1 + \cdots + a_1 p_n = 0, \\ (a_{i+2} - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_i) p_1 + \cdots + (a_{i-n+2} - a_{i-n+1}) p_n = 0, \quad i \geq n. \end{array} \right. \quad (6)$$

证 (5) 式是对象的最小化模型, 故由阶跃响应系数与对象传递函数的关系

$$\frac{m_1 z^{-1} + \cdots + m_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}} = a_1 z^{-1} + (a_2 - a_1) z^{-2} + (a_3 - a_2) z^{-3} + \cdots$$

可直接导出(6)式的递推关系.

利用文[5]的结果和引理 2.1, 我们可导出图 1 所示 GPC 的内模控制结构, 其中

$$G_M(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad (7)$$

$$G_c(z^{-1}) = \frac{d_s A(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}. \quad (8)$$

式中

$$d_s = \sum_{i=1}^{N_2-N_1+1} d_i,$$

$$A_c(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 + (b_{N_1+1} - 1)z^{-1} + (b_{N_1+2} - b_{N_1+1})z^{-2} + \cdots). \quad (9)$$

其中

$$b_i = \sum_{j=1}^{N_2-N_1+1} d_j a_{i+j-1}, \quad (10)$$

进而可得:

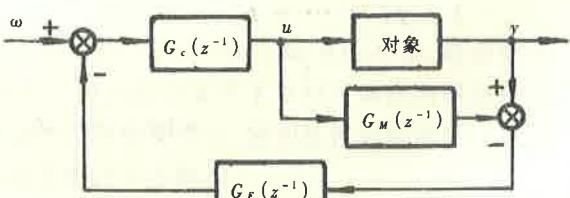


图 1 GPC 的内模控制结构

其中

$$A_c(z^{-1}) = 1 + p_1^* z^{-1} + \dots + p_{n+1}^* z^{-(n+1)}. \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ b_{N_1+1} - 1 & 1 & & & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ b_{N_1+n+1} - b_{N_1+n} & \cdots & \cdots & b_{N_1+1} - 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}. \quad (12)$$

当模型与对象之间无失配时, GPC 系统的闭环传递函数为

$$G(z^{-1}) = G_c(z^{-1})G_M(z^{-1}) = \frac{d_s z^{-1} B(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}, \quad (13)$$

此时对象特征多项式与控制器分子多项式发生对消, 系统的稳定性分析实际上只涉及到内模结构中的开环稳定性, 即 GPC 稳定性完全取决于控制器。而当模型失配时, 对消不能实现, 系统稳定性将通过分析整个闭环系统来进行, 这已是内模控制结构中的鲁棒性问题, 我们在此不作讨论。因此, 我们总是假定模型与对象之间无失配, 并且不考虑扰动和自适应的情况。由于 $A_c(z^{-1})$ 即为这种情况下的闭环特征多项式, 只须保证 $A_c(z^{-1})$ 的根均在单位圆内, 闭环系统即稳定。

3 稳定性参数设计

由于控制器的特征多项式 $A_c(z^{-1})$ 即反映了闭环系统的动态特性, 所以利用以上(12)式给出的系数映射关系, 我们即可分析一般参数设计对于系统闭环稳定性的影响。

首先我们给出有关 GPC 闭环稳定的必要条件。

定理 3.1 GPC 闭环系统稳定的必要条件是 $d_s B(1) > 0$ 。

证 由离散控制理论可知, 要使 $A_c(z^{-1})$ 稳定的必要条件是 $A_c(1) > 0$,

即 $1 + p_1^* + \dots + p_{n+1}^* > 0$,

在(12)式的两边同乘以 $(1 \dots 1)$ 可得:

$$1 + p_1^* + \dots + p_{n+1}^* = (b_{N_1+n+1} \ b_{N_1+n} \ b_{N_1+1}) \mathbf{p}$$

$$= (d_1 \ \dots \ d_{N_2-N_1+1}) \begin{bmatrix} a_{N_1+n+1} & a_{N_1+n} & \cdots & a_{N_1+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_2+n+1} & a_{N_2+n} & \cdots & a_{N_2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

将(6)式的前 $n+i-1$ 个等式相加有:

$$a_{i+n-1} + a_{i+n-2} p_1 + \dots + a_{i-1} p_n = m_1 + \dots + m_n = B(1), \quad i \geq 1.$$

故 $1 + p_1^* + \dots + p_{n+1}^* = d_s B(1)$, 所以 $d_s B(1) > 0$ 即为 GPC 闭环系统稳定的必要条件。

证毕。

特别地, 在以上定理中对于开环稳定对象, 我们有 $a_\infty = B(1)/A(1)$, 此时 a_∞ 为对象稳态增益且 $A(1) > 0$, 这时必要条件 3.1 可转化为 $d_s a_\infty > 0$, 即只有当 d_s 与对象稳态增益同号时, 系统才可能稳定。

在一定的参数选取条件下, 我们可以得到如下的稳定性结论。

定理 3.2 对于开环稳定对象, 如果 $N_u = 1, \lambda = 0$, 则存在 N_0 , 当 $N_2 \geq N_0$ 时闭环系统稳

定。

证 由 $N_u = 1$ 及 $\lambda = 0$ 可得

$$d^T = (a_{N_1} \dots a_{N_2}) / \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i^2, \text{ 故 } b_i = \sum_{j=1}^{N_2-N_1+1} a_{N_1+j-1} a_{i+j-1} / \sum_{j=N_1}^{N_2} a_j^2,$$

易得当 $N_2 \rightarrow +\infty$ 时, $b_i \rightarrow 1$.

将其代入(12)式可得:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

显然,由上式所定义的映射关系,闭环特征多项式 $A_c(z^{-1})$ 等于开环对象特征多项式 $A(z^{-1})$, 即 $N_2 \rightarrow +\infty$ 时 $A_c(z^{-1})$ 稳定,故存在 N_0 , 当 $N_2 \geq N_0$ 时闭环系统稳定。证毕。

类似地,我们有如下的结论。

定理 3.3 对于开环稳定对象,如果 $N_u = 1$,则存在 N_0 ,当 $N_2 - N_1 \geq N_0$ 时闭环系统稳定。

由有关系统的 deadbeat 性质讨论^[6],我们还可得如下结果。

定理 3.4 对于 n 阶对象,若

- 1) $N_u = n + 1, N_1 \geq n, N_2 \geq N_1 + n$ 或
- 2) $N_u \geq n + 2, N_1 = n, N_2 \geq N_u + n - 1$ 及 $m_n \neq 0$,

则存在常数 $\lambda_0 > 0$ 使得对于 $\lambda \leq \lambda_0$ 闭环 GPC 是稳定的。

证 GPC 闭环系统的极点是随着参数 λ 的变化而连续变化的。由文[6]我们知道在给定条件及 $\lambda = 0$ 时,闭环系统表现为 deadbeat 控制,即此时所有的闭环极点均配置在原点。当 λ 增加时,它们将朝远离原点的方向运动,但必存在 λ 的一个上界,不妨设为 λ_0 ,使得对于任意 $\lambda \leq \lambda_0$,所有的极点均位于单位圆内,即闭环系统稳定。证毕。

4 基于阶跃响应性质的稳定性设计

以上讨论了保证稳定性的参数设计条件,这方面的研究比较困难,成果也不多。前面所导出的 IMC 结构意义下的 GPC 闭环描述,在设计参数一旦确定的条件下立即可以作出系统稳定与否的判断,并且对于系统的稳定性分析也将起到很大的推动作用。特别是针对阶跃响应系数具有一定性质的对象,可以得出比较简洁而方便的参数设计准则。

我们将(9)式变换为:

$$\frac{A_c(z^{-1})}{A(z^{-1})} = 1 + (b_{N_1+1} - 1)z^{-1} + (b_{N_1+2} - b_{N_1+1})z^{-2} + \dots, \quad (14)$$

对于开环稳定对象, $A(z^{-1})$ 的根都在单位圆内。若(14)式在 $|z| \geq 1$ 时恒不等于零,那么 $A_c(z^{-1})$ 是稳定的,即闭环系统稳定。

我们知道,对于实系数多项式

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_n z^{-n},$$

如果

$$1) 1 > \sum_{i=1}^n |f_i|, \quad \text{或}$$

$$2) 1 > f_1 > \dots > f_n > 0,$$

则 $f(z^{-1})$ 是稳定的. 利用复变函数论中的 Hurwitz 定理^[7] 可以证明, 对于无穷级数

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots,$$

如果有

$$1) 1 > \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|, \quad \text{或} \quad (15)$$

$$2) 1 > f_1 > f_2 > \dots > 0, \quad (16)$$

则 $f(z^{-1})$ 在 $|z| \geq 1$ 时恒不取零值, 亦即 $f(z^{-1})$ 稳定.

由以上的充分条件, 我们可以讨论基于阶跃响应系数性质的稳定性.

定理 4.1 对于开环稳定对象且其阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 在 $i \geq k$ 后单调递增, 即: $0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_\infty$, 其中 $a_\infty = B(1)/A(1)$, 只须选择 $N_2 \geq N_0$, 其中 N_0 使下式得到满足:

$$\sum_{i=N_1}^{N_0} a_i^2 > \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i,$$

并且 $N_1 \geq k, N_u = 1, \lambda = 0$ 则闭环系统是稳定的.

证 首先我们证明 $N_2 = N_0$ 的情况.

由 $N_u = 1$ 及 $\lambda = 0$ 可得

$$d^T = (a_{N_1} \ \dots \ a_{N_0}) / \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i^2, \quad \text{故 } b_i = \sum_{j=1}^{N_0-N_1+1} a_{N_1+j-1} a_{i+j-1} / \sum_{j=N_1}^{N_0} a_j^2,$$

且 $b_{N_1} = 1$, 令 $s = 1 / \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i^2$, 则

$$b_{N_1+1} - 1 = s[a_{N_1}(a_{N_1+1} - a_{N_1}) + \dots + a_{N_0}(a_{N_0+1} - a_{N_0})] \geq 0,$$

$$b_{N_1+2} - b_{N_1+1} = s[a_{N_1}(a_{N_1+2} - a_{N_1+1}) + \dots + a_{N_0}(a_{N_0+2} - a_{N_0+1})] \geq 0,$$

⋮

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{N_1+j} - b_{N_1+j-1}| &= \sum_{j=1}^{\infty} (b_{N_1+j} - b_{N_1+j-1}) \\ &= s[a_{N_1}(a_\infty - a_{N_1}) + \dots + a_{N_0}(a_\infty - a_{N_0})] \\ &= s \left[a_\infty \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i - \frac{1}{s} \right] = s a_\infty \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i - 1. \end{aligned}$$

所以利用(15)的充分条件, 只须有 $1 > s a_\infty \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i - 1$, 即 $\sum_{i=N_1}^{N_0} a_i^2 > \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i$, 就能保证系统是稳定的;

其次考虑 $N_2 \geq N_0$ 的情况, 我们利用反证法证明 $a_{N_0} > \frac{a_\infty}{2}$. 若不然, 假设 $a_{N_0} \leq \frac{a_\infty}{2}$, 则有 0

$\leq a_{N_1} \leq \dots \leq a_{N_0} \leq \frac{a_\infty}{2}$, 因此 $\sum_{i=N_1}^{N_0} a_i^2 \leq \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i$, 与已知前提矛盾, 故 $a_{N_0} > \frac{a_\infty}{2}$ 成立. 即有

$$\sum_{i=N_1}^{N_2} a_i^2 > \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_0} a_i + \sum_{i=N_0+1}^{N_2} a_i^2 > \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i.$$

综上, 可得闭环系统稳定. 证毕.

为便于参数设计, 我们还有:

推论 4.1 对于满足定理 4.1 条件的对象, 若选择 N_2 使得

$$\frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i > \frac{a_\infty}{2} > 0$$

成立,即可保证闭环系统的稳定性.

证 若上述条件成立,根据几何平均大于等于算术平均:

$$\sqrt{\frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i^2} \geq \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i,$$

即有

$$\sum_{i=N_1}^{N_2} a_i^2 \geq \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \left(\sum_{i=N_1}^{N_2} a_i \right)^2 \geq \frac{a_\infty}{2} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i,$$

所以由定理 4.1,闭环系统是稳定的. 证毕.

更进一步,还可以继续简化此时的参数选取条件:

推论 4.2 对于满足定理 4.1 条件的对象,只须选择 N_1 ,使得 $a_{N_1} > \frac{a_\infty}{2} > 0$ 成立,以及 $N_u = 1, \lambda = 0$ 即可确保闭环系统稳定.

证 由 $\{a_i\}$ 的单调递增性质有: $a_{N_2} \geq \dots \geq a_{N_1} \geq 0$, 所以 $\frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i \geq a_{N_1} > \frac{a_\infty}{2} > 0$ 成立,由推论 4.1 可得本结论. 证毕.

这两个推论有着很明显的物理意义:前者表明选取参数时使预测时域区间内的阶跃响应系数平均值大于稳态增益的一半即可确保稳定性;后者更加强为只须 a_{N_1} 大于稳态增益的一半系统即稳定,这样选择设计参数十分方便.

与此类似,对于阶跃响应系数具有上凸性的对象,我们有:

定理 4.2 对于开环稳定对象并且其阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 在 $i \geq k$ 后满足严格上凸性,即:

$$a_k > a_{k+1} - a_k > a_{k+2} - a_{k+1} > \dots > 0.$$

只须取 $N_1 \geq k, N_u = 1, \lambda = 0$, 闭环系统即稳定.

证 同样令 $s = 1 / \sum_{i=N_1}^{N_2} a_i^2$, 且有 $b_{N_1} = 1$, 故:

$$1 = s[a_{N_1}^2 + \dots + a_{N_2}^2] > 0,$$

$$b_{N_1+1} - 1 = s[a_{N_1}(a_{N_1+1} - a_{N_1}) + \dots + a_{N_2}(a_{N_2+1} - a_{N_2})] > 0,$$

$$b_{N_1+2} - b_{N_1+1} = s[a_{N_1}(a_{N_1+2} - a_{N_1+1}) + \dots + a_{N_2}(a_{N_2+2} - a_{N_2+1})] > 0,$$

⋮

由 $N_1 \geq k$ 有 $a_j > a_{j+1} - a_j > a_{j+2} - a_{j+1} > \dots > 0, j \geq N_1$, 所以 $1 > b_{N_1+1} - 1 > b_{N_1+2} - b_{N_1+1} > \dots > 0$ 成立,由(16)式的充分条件,闭环系统稳定. 证毕.

注释 4.1 1) 对于阶跃响应系数 $a_i < 0$ 的对象,我们也同样可导出相应的结论.

2) 可以看到,定理 4.1,4.2 中的条件并不始终要求对象单调增和上凸,只是在某一时刻之后具有大范围递增性和上凸性就可以了.

5 结 论

本文利用内模控制结构下广义预测控制的闭环表达形式,讨论了在一定参数选取的条件下系统闭环稳定的问题,并针对阶跃响应系数具有大范围递增性和上凸性的对象给出了确保稳定性的参数设计条件,为此类对象的预测控制器设计提供了简单明了的准则.

参 考 文 献

- 1 Ricker, N. L.. Model-predictive control: state of the art. Chemical Process Control-CPCIV, CACHE-AlChE, Austin-New York, 1991, 271—296
- 2 Garcia, C. E., Prett, D. M. and Morari, M.. Model predictive control: theory and practice—a survey. Automatica, 1989, 25(3):335—348
- 3 Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S.. Generalized predictive control. Part 1 and 2. Automatica, 1987, 23:137—160
- 4 Garcia, C. E. and Morari, M.. Internal model control, 1. A Unifying Review and some New Results. IEC Process Des. Dev., 1982, 21(2):308—323
- 5 席裕庚,厉隽悌.广义预测控制系统的闭环分析.控制理论与应用,1991,8(4):419—424
- 6 席裕庚,张峻.广义预测控制的deadbeat性质研究.控制理论与应用,1997,14(5):733—737
- 7 范莉莉等.复变函数论.上海:上海科学技术出版社,1987

Several Stability Results on GPC System

ZHANG Jun and XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC),

Abstract: In this paper, by using the coefficient mapping from plant to GPC closed-loop system in the IMC structure, the stability conditions for closed-loop system with respect to selection of tuning parameters are derived. Furthermore, some simple conditions described by step response coefficients for tuning parameters which guarantee the stability of the closed-loop system are also obtained.

Key word: generalized predictive control; coefficient mapping; closed-loop stability

本文作者简介

张 峻 1971年生.1993年毕业于上海交通大学自动控制系,现为该系博士研究生.研究方向为预测控制.

席裕庚 1946年生.1968年毕业于哈尔滨军事工程学院,1984年在德国慕尼黑工业大学获得工学博士学位.现为上海交通大学教授,博士生导师.目前主要研究方向为复杂工业过程与智能机器人的控制理论和方法.