第 15 卷第 2 期
1998 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 2
Apr., 1998

多滞后连续大系统的鲁棒稳定性分析与遗传算法的应用

张 剑
(解放军通信学院交换教研室·广州,510502)

刘永清 沈建京
(华南理工大学自动控制工程系·广州,510641)

摘要:本文给出了一种新的用于判定具有多滞后及系统参数扰动线性连续大系统鲁棒稳定性的充分条件,同时,基于遗传算法(GA)技术,给出了这个充分条件在实际工程应用中的实现算法.数字计算结果验证了该算法的可行性和有效性.

关键词:大系统;时滞;鲁棒稳定性;遗传算法

1 引 言

由于时滞现象在实际工程中是普遍存在的,同时,它又是使得系统不稳定的重要因素,因此,对时滞系统的稳定性研究一直受到国内外众多学者的广泛关注.近年来,Hmamed, A. Luo, J. S. 等,基于 Brierley, S. D. 的结果[1]和矩阵范数及测度方法,给出了一些新的时滞系统稳定性判据[2,3,4,5].这些判据的主要特点是形式简单,并且,和文[6]比较其稳定性分析结果具有更小的保守性.但是,在实际应用中,却存在着需求解含有复变量矩阵最大测度的计算问题,即使对维数不大的系统,这个问题也是一个相当复杂的寻优过程.为此,如何解决这个计算问题,同时,发挥这些判据的主要优势,使之推广应用于多滞后大系统的稳定性分析,这正是本文研究的目的和内容.

2 多滞后大系统的鲁棒稳定性分析

考虑 n 阶多滞后大系统,其中,第 i 个子系统为

$$\begin{aligned}\dot{X}_i(t) &= (A_i + \Delta A_i)X_i(t) + (B_i + \Delta B_i)X_i(t - \tau_i) \\ &\quad + \sum_{k=1, k\neq i}^{m}[(A_{ik} + \Delta A_{ik})X_k(t) + (B_{ik} + \Delta B_{ik})X_k(t - \tau_{ik})], \\ i &= 1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{1}$$

这里,$A_i, \Delta A_i, B_i, \Delta B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $A_{ik}, \Delta A_{ik}, B_{ik}, \Delta B_{ik} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_k}$, $\tau_i, \tau_{ik} > 0$, 并且, $\|\Delta A_i\| \leqslant \alpha_i$, $\|\Delta B_i\| \leqslant \beta_i$, $\|\Delta A_{ik}\| \leqslant \alpha_{ik}$, $\|\Delta B_{ik}\| \leqslant \beta_{ik}$, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

引理 1[4] 下列多滞后系统:

$$\dot{X}(t) = A_0X(t) + B_0X(t - \tau_0) + \sum_{i=1}^{m}(A_iX(t) + B_iX(t - \tau_i)).$$

这里,$A_i, B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tau_i > 0, i = 0,1,2,\cdots,m$, 是渐近稳定的,当且仅当系统

$$\dot{Y}(t) = [A_0 + Z_0B_0 + \sum_{i=1}^{m}(A_i + Z_iB_i)]Y(t).$$

$Z_i = \exp(j\omega_i), \omega_i \in [0,2\pi], j = \sqrt{-1}, i = 0,1,2,\cdots,m$ 是渐近稳定的.

引理 2[7] 对于矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 下式成立

$$\|\exp(A + ZB)t\| \leqslant \exp[\mu(A + ZB)t], \quad t \geqslant 0.$$

$$Z = \exp(j\omega), \quad \omega \in [0,2\pi], j = \sqrt{-1}.$$

本文于 1996 年 6 月 28 日收到. 1997 年 1 月 15 日收到修改稿.

引理 3[8]（比较定理） 设 $F \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$，$F(t,s)$，是单调非递减的，且对每一对 (t,s) 关于 x 有

$$x(t) \leqslant x_0(t) + \int_{t_0}^{t} F(t,s,x(s))\mathrm{d}s.$$

这里，$x, x_0 \in C[J, \mathbb{R}^n]$. 设 $r(t)$ 是在 $[t_0, \infty]$ 上方程

$$w(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} F(t,s,w(s))\mathrm{d}s$$

的最大解，则有：$x(t) \leqslant r(t), t \geqslant t_0$.

由引理 1，引理 2 及引理 3，我们可以得到下列定理.

定理 1 如果矩阵 C 是稳定的，则系统(1)是渐近稳定的. 这里，矩阵 C 定义为：

$$\begin{cases} c_{ii} = \mu(A_i + Z_i B_i) + \alpha_i + \beta_i, \\ c_{ik} = \| A_{ik} \| + \| B_{ik} \| + \alpha_{ik} + \beta_{ik}, \quad k \neq i. \end{cases} \tag{2}$$

证 由引理 1 可知，系统(1)的渐近稳定性隐含于下列系统的渐近稳定性.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i(t) = {} & [(A_i + \Delta A_i) + Z_i(B_i + \Delta B_i)]Y_i(t) \\ & + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} [(A_{ik} + \Delta A_{ik}) + Z_{ik}(B_{ik} + \Delta B_{ik})]Y_k(t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$i = 1,2,\cdots,m.$$

这里，$Z_i = \exp(j\omega_i)$，　$Z_{ik} = \exp(j\omega_{ik})$，　$\omega_i, \omega_{ik} \in [0, 2\pi]$，　$j = \sqrt{-1}$.

将(3)含有 $Y_k(t)$ 的第二大项看作系统的输入项 $u_i(t)$，则(3)的解式可写为：

$$\begin{aligned} Y_i(t) = {} & \exp[(A_i + \Delta A_i) + Z_i(B_i + \Delta B_i)]Y_i(0) \\ & + \int_0^t \exp[(A_i + \Delta A_i) + Z_i(B_i + \Delta B_i)(t-s)] \\ & \times [\sum_{k=1,k\neq i}^{m} [(A_{ik} + \Delta A_{ik}) + Z_{ik}(B_{ik} + \Delta B_{ik})]Y_k(s)]\mathrm{d}s, \quad i = 1,2,\cdots,m. \end{aligned} \tag{4}$$

(4)式两边取范数有：

$$\begin{aligned} \| Y_i(t) \| \leqslant {} & \| \exp[(A_i + \Delta A_i) + Z_i(B_i + \Delta B_i)] \| \, \| Y_i(0) \| \\ & + \int_0^t \| \exp\{[(A_i + \Delta A_i) + Z_i(B_i + \Delta B_i)](t-s)\} \| \\ & \times [\sum_{k=1,k\neq i}^{m} (\| A_{ik} \| + \| B_{ik} \| + \alpha_{ik} + \beta_{ik}) \| Y_k(s) \|]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

这里，$|Z_{ik}| = 1$.

设 $W_i(t) = \| Y_i(t) \|$，根据引理 2 及矩阵范数和测度的性质有：

$$\begin{aligned} W_i(t) \leqslant {} & \exp[\mu(A_i + Z_i B_i) + \alpha_i + \beta_i]W_i(0) \\ & + \int_0^t \exp[(\mu(A_i + Z_i B_i) + \alpha_i + \beta_i)(t-s)] \\ & \times [\sum_{k=1,k\neq i}^{m} (\| A_{ik} \| + \| B_{ik} \| + \alpha_{ik} + \beta_{ik})W_k(s)]\mathrm{d}s, \quad i = 1,2,\cdots,m. \end{aligned} \tag{5}$$

设

$$\begin{aligned} V_i(t) = {} & \exp[\mu(A_i + Z_i B_i) + \alpha_i + \beta_i]W_i(0) + \int_0^t \exp[(\mu(A_i + Z_i B_i) + \alpha_i + \beta_i)(t-s)] \\ & \times [\sum_{k=1,k\neq i}^{m} (\| A_{ik} \| + \| B_{ik} \| + \alpha_{ik} + \beta_{ik})V_k(s)]\mathrm{d}s, \quad i = 1,2,\cdots,m. \end{aligned}$$

则上式是下列系统方程的解，

$$\dot{V}_i(t) = [\mu(A_i + Z_iB_i) + \alpha_i + \beta_i]V_i(t)$$

$$+ \sum_{k=1,k\neq i}^{m} (\|A_{ik}\| + \|B_{ik}\| + \alpha_{ik} + \beta_{ik})V_k(t), \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{6}$$

因 $V_i(t) \geqslant \|Y_i(t)\|$，根据引理3可知，$V_i(t)$ 的渐近稳定性隐含着 $Y_i(t)$ 的渐近稳定性. 而(6)式也可表示为

$$\dot{V}(t) = CV(t).$$

这里，$V(t) = [V_1(t)^{\mathrm{T}}, V_2(t)^{\mathrm{T}}, \cdots, V_m(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$C = [c_{ik}]_{m\times m}$，其 c_{ik} 的定义同定理1中的(2)式，从而，矩阵 C 如果是稳定的，则系统(1)是渐近稳定的. 证毕.

3 求解 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1} \mu(A+ZB)$ 的遗传算法

由定理1可知，当应用定理1对系统(1)进行稳定性分析时，需求解决 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1} \mu(A+ZB)$ 的求解问题，这也是定理1应用于工程实际的关键. 如何计算 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1} \mu(A+ZB)$，这是一个复数域下带约束条件的优化求解问题，目前，尚没有一般的算法可以利用. 为此，我们基于遗传算法技术，对这个问题给出了一种快速而有效的解决方法.

取 $\mu_\infty(M) = \max\limits_i(\mathrm{Re}(m_{ii}) + \sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n} |m_{ik}|)$ 作为这里的测度计算，由 $Z = \exp(\mathrm{j}\omega) = \cos(\omega) + \mathrm{j}\sin(\omega)$，$\omega \in [0, 2\pi]$，我们可以得到：

$$\max_{Z\in C,|Z|=1} \mu_\infty(A+ZB) = \max_{\omega\in[0,2\pi]} \{\max_i [a_{ii} + b_{ii}\cos\omega$$

$$+ \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \sqrt{(a_{ik} + b_{ik}\cos\omega)^2 + (b_{ik}\sin\omega)^2}]\}. \tag{7}$$

根据(7)式，我们给出具体的遗传算法如下：

设种群大小为：pop-size，$W(t) = (w_1(t), w_2(t), \cdots, w_{\text{pop-size}}(t))$ 表示第 t 次进化后的种群. 其中，种群中的每个种子用浮点数代码表示. 其遗传算法的进化过程为：

```
procedure genetic algorithm;
begin
    t:=0;
    initialize W(t) ;
    evaluate W(t) ;
    while not (terminate condition ) do
    begin
        t:=t+1;
        select W(t) from W(t - 1) ;
        crossover W(t) ;
        mutate W(t) ;
        evaluate W(t) ;
    end;
end.
```

具体实现：

1) 初始化 $W(0)$：随机产生 pop-size 个 $[0, 2\pi]$ 之间的随机数，完成对种群的初始化.

2) 种群的评估：取适应函数为

$$\text{fitness}(\omega_i(t)) = K + \max_i\{a_{ii} + b_{ii}\cos\omega(t) + \sum_{k=1,k\neq i}^{n}\sqrt{(a_{ik} + b_{ik}\cos\omega(t))^2 + (b_{ik}\sin\omega(t))^2}\}.$$

其中，$K > 0$ 是一常数，用于保证 fitness$(\cdot) > 0$. 种子 $\omega_i(t)$ 对应的适应度越高，说明该种子越适应 fitness$(\cdot)$ 定义的生存环境，从而为种群进化提供依据.

3) 选择：根据一定的概率分布从当前种群 $W(t)$ 中选取适应度较高的优良种子，而后将产生的新种子加入下一代种群 $W(t+1)$，使其优良特性得以遗传.

具体算法为：

· 计算种群中每个种子的适应函数值 fitness$(w(i))$ 及种群总的适应函数值

$$F = \sum_{i=1}^{\text{pop-size}} \text{fitness}(w(i)).$$

· 计算每个种子的被选择概率 $p_i = \text{fitness}(w(i))/F$ 及累积概率 $q_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$.

· 循环产生一随机小数 r_k，当 $r_k < q_1$ 时，选择种子 $w(1)$ 进入下一代种群；为 $q_{i-1} < r_k < q_i$ 时，选择种子 $w(i)$ 进入下一代种群. 其中 $k = 1,2,\cdots,$pop-size，从而得到下一代新种群 $W(t+1) = (w_1(t+1), w_2(t+1), \cdots, w_{\text{pop-size}}(t+1))$.

4) 交叉：给定一交叉概率 p_c，从当前种群中选择 $p_c *$ pop-size 个种子并进行配对，使其作为双亲完成交叉进化. 设 $\omega_k(t)$ 和 $\omega_{k+1}(t)$ 作为一对双亲被选定完成交叉进化，则有

$$\begin{cases}\omega_k(t+1) = \alpha\omega_k(t) + (1-\alpha)\omega_{k+1}(t), \\ \omega_{k+1}(t+1) = \alpha\omega_{k+1}(t) + (1-\alpha)\omega_k(t).\end{cases} \tag{8}$$

其中，$0 < \alpha < 1$.

具体算法为：

· 循环产生一随机小数 r_k，当 $r_k < p_c$ 时，选择种子 $w(k)$ 进入交叉进化；其中 $k = 1,2,\cdots,$ pop-size.

· 设共有 n 个 $w(k)$ 进入交叉进化，可先将其两两配对，而后按(8)式完成种群的交叉进化.

5) 变异：以一定的变异概率 p_m 从种群 $W(t)$ 中随机选取若干个种子，使之产生变异，以模拟生物进化过程偶然的突变现象. 设种子 $\omega_k(t)$ 被选中，则通过产生一随机数 s，使 $\omega_k(t)$ 产生如下变异.

$$\omega_k(t) = \begin{cases}\omega_k(t) + \Delta(t, UB - \omega_k(t)), & s < 0.5, \\ \omega_k(t) - \Delta(t, \omega_k(t) - LB), & s \geqslant 0.5.\end{cases} \tag{9}$$

其中，$\Delta(t,y) = y(1 - r^{(1-t/T)^b})$，$b$ 是系统参数，r 是一随机数，t 为迭代次数，T 为约定的最大迭代次数，$LB = 0, UB = 2\pi$.

具体算法为：

· 循环产生一随机小数 r_k，当 $r_k < p_m$ 时，选择种子 $w(k)$ 按(9)式完成其变异操作. 其中 $k = 1,2,\cdots,$pop-size.

根据矩阵 C 的定义(2)以及上述用于求解 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1}\mu(A+ZB)$ 的算法可知，我们可以完全并行地分别求解 $\max\limits_{Z_i\in C,|Z_i|=1}\mu(A_i+Z_iB_i)$ 和 $\|A_{ik}\|$，$\|B_{ik}\|$，$i,k = 1,2,\cdots,m$，从而可成倍的提高其计算速度，实现其矩阵 C 的构造，快速给出系统(1)的鲁棒稳定性分析.

4 数值计算与分析

例 4.1 分析如下由 3 个子系统组成的多滞后大系统(1)的稳定性. 这里,

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc|cc}
-5.7321 & 0.2174 & 0.1343 & -0.0430 & 0.0808 & -0.1256 & -0.0189 & 0.0525\\
0.1243 & -3.9216 & 0.3472 & 0.0633 & -0.1674 & 0.1742 & -0.1124 & 0.1204\\
0.2523 & -1.1532 & -4.6312 & -0.1596 & -0.2116 & -0.2183 & -0.1220 & 0.2125\\
\hline
-0.0969 & -0.1299 & -0.1486 & -4.8573 & 1.0253 & 0.0000 & -0.0386 & -0.1020\\
-0.0834 & 0.1023 & 0.1880 & 0.0000 & -3.7521 & 0.2067 & -0.0779 & 0.1505\\
0.1900 & -0.2244 & 0.2717 & -0.5012 & 0.2421 & -5.8532 & -0.1536 & -0.2134\\
\hline
-0.0143 & -0.0900 & -0.1152 & -0.0811 & -0.0840 & 0.1930 & -5.2315 & 0.4374\\
-0.1322 & 0.1271 & -0.2085 & 0.0678 & 0.1569 & -0.1799 & 1.5329 & -6.3218
\end{array}\right],$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc|ccc|cc}
0.2153 & 0.1043 & 0.1642 & -0.0562 & 0.1006 & -0.1663 & 0.0899 & -0.1313\\
0.1421 & 0.1097 & 0.2073 & 0.1443 & -0.1786 & 0.2366 & -0.1275 & 0.1845\\
0.2152 & 0.3275 & 0.4328 & -0.1680 & 0.2182 & -0.2609 & 0.1880 & -0.2174\\
\hline
-0.0913 & 0.1380 & -0.1979 & 0.1274 & 0.0000 & 0.1095 & 0.0906 & 0.1383\\
0.1119 & -0.1529 & 0.2441 & 0.0000 & 0.1534 & 0.0000 & -0.1374 & 0.1952\\
-0.1701 & 0.2325 & 0.2644 & 0.5753 & 0.0000 & 0.1523 & -0.1752 & -0.2136\\
\hline
0.0511 & -0.1479 & -0.1599 & -0.0841 & -0.1127 & 0.1599 & 0.3532 & -1.3246\\
0.1465 & -0.1875 & -0.2427 & 0.1494 & 0.1694 & -0.2357 & -1.6543 & -0.4983
\end{array}\right].$$

运用第 3 节中建立的用于求解 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1}\mu(A+ZB)$ 的遗传算法,这里,我们取 $b=2,T=100$, pop-size $=200$, $p_c=0.65$, $p_m=0.005$,在主频为 100 兆的 486PC 机上,仅须几十秒时间,即可完成上述计算并可得表 1.

表 1 $\max\limits_{Z\in C,|Z|=1}\mu(A+ZB)$ 的计算结果

Z	$Z_1^*=0.8415+0.5403j$	$Z_2^*=0.9093-0.4161j$	$Z_3^*=-0.9589+0.2837j$
$\max\limits_{Z\in C,\lvert Z\rvert=1}\mu(A+ZB)$	-2.9230	-3.4059	-2.6896

而后,分别并行地计算 $\|A_{ik}\|$ 和 $\|B_{ik}\|$, $i,k=1,2,3,i\neq k$ 可得矩阵

$$C=\begin{bmatrix}
-2.9230+\alpha_1+\beta_1 & 1.2366+\alpha_{12}+\beta_{12} & 0.7398+\alpha_{13}+\beta_{13}\\
1.3532+\alpha_{21}+\beta_{21} & -3.4059+\alpha_2+\beta_2 & 0.7558+\alpha_{23}+\beta_{23}\\
1.0445+\alpha_{31}+\beta_{31} & 0.9591+\alpha_{32}+\beta_{32} & -2.6896+\alpha_3+\beta_3
\end{bmatrix}.$$

由 M 矩阵的性质可知,当

$$\begin{cases}
0<\alpha_1+\beta_1+\alpha_{12}+\beta_{12}+\alpha_{13}+\beta_{13}\leqslant 0.9466,\\
0<\alpha_2+\beta_2+\alpha_{21}+\beta_{21}+\alpha_{23}+\beta_{23}\leqslant 1.2969,\\
0<\alpha_3+\beta_3+\alpha_{31}+\beta_{31}+\alpha_{32}+\beta_{32}\leqslant 0.6860.
\end{cases}$$

矩阵 C 一定是稳定的,这时,根据定理 1 可得到该系统是渐近稳定的.

5 结束语

多滞后且具有系统参数扰动大系统的稳定性分析是非常复杂和困难的. 现有的研究理论和方法大多偏重于数学上的理论推导和结果表述,从而使得这些研究结果往往不适宜实际工程应用. 为此,本文从实际应用的角度出发,首次结合人工智能中的遗传算法技术,同时给出了实现上述大系统鲁棒稳定性分析的理论结果和具体的实现算法. 数值计算表明,本文中的理论和方法可方便地应用于工程实践,是非常具有实际应用价值的. 目前,虽然 GA 理论研究尚需进一步深入,但可以相信,GA 为控制系统的分析及设计引入一个独特的方法,它必将在控制领域中得到广泛的应用.

参 考 文 献

1 Brierley, S. D., Chiasson, J. N., Lee, E. B. and Zak, S. H.. On the stability independent of delay for linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, 27(2): 252—254

2 Hmamed, A.. On the stability of time delay systems: new results. Int. J. Control, 1986, 43(2): 321—324

3 Hmamed, A.. Further results on the robust stability of uncertain time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 1991, 22(3): 605—614

4 Luo, J. S., Johnson, A., van den Bosch, P. P. J.. Delay-independent robust stability of uncertain linear systems. Systems & Control Letters, 1995, 24(1): 33—39

5 Tissir, E. and Hmamed, A.. Stability tests of interval time delay systems. Systems & Control Letters, 1994, 23(2): 263—270

6 Mori, T.. Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay. Int J. Control, 1981, 34(5): 1175—1184

7 Coppel, W. A.. Stability and asymptotic behavior of differential equations. D. C. Heath. Boston, 1965

8 Lakshmikanthasm, V. and Leela, S.. Differential and integral inequalities. Vol. 1, Academic Press, New York, 1969

9 Fogel, D. B.. Applying evolutionary programming to selected control problems. Computers Math. Applic. 1994, 27(1): 89—104

10 Zbigniew Michalewicz. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992

Robust Stability Analyzing of Linear Large Scale Systems with Time Delays and Applying of Genetic Algorithm

ZHANG Jian

(Exchange Techniques Research Division, Communication College of Guangzhou · 510502, PRC)

LIU Yongqing　and　SHEN Jianjing

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: In this paper we not only present a new sufficient condition for testing the robust stability of linear large scale systems with time delays and system parameter perturbation but also give an implement algorithm for applying the sufficient condition in practical engineering based on GA (genetic algorithm). Numerical computation are performed to verify the feasibility and effectiveness of the algorithm.

Key words: large scale system; time delay; robust stability; genetic algorithm

本文作者简介

张　剑　1963 年生. 广州解放军通信学院副教授. 于 1997 年在华南理工大学自动化系获工学博士学位. 主要研究兴趣有神经网络理论，并行算法，遗传算法及智能控制，动态大系统的智能稳定性分析与镇定.

刘永清　见本刊 1998 年第 1 期第 124 页.

沈建京　1961 年生. 解放军测绘学院副教授，博士后. 主要研究兴趣有动态大系统稳定性理论，智能稳定与镇定方法.