第 15 卷第 2 期
1998 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 2
Apr., 1998

具有 H_∞ 误差界的鲁棒最小方差滤波

吴淮宁
(北京理工大学电子工程系·北京,100081)
谢凯年　尤昌德
(西安交通大学电信学院自动控制研究所·西安,710049)
费元春
(北京理工大学电子工程系·北京,100081)

摘要: 本文研究了含有范数有界参数不确定的线性连续系统在未建模外部干扰信号作用时的鲁棒最小方差滤波问题. 给出了最坏情形 H_2 性能指标在满足一个 H_∞ 估计误差约束时的一个上界,并设计了一个使得该界达到最小意义上的最优滤波器. 所得的滤波器对所有可容许的参数不确定都能满足一个给定的 H_∞ 误差界,且为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界.

关键词: H_∞ 范数; 最小方差滤波; 代数 Riccati 方程; 鲁棒性

1 引　言

Kalman 滤波是信号估计的一个重要方法,它要求知道精确的系统模型与噪声的统计特性. 然而,在大多场合这些要求往往很难满足,此时这种方法不能在误差方差意义上提供一个保证性能,并有可能出现发散现象. 因此近年来 H_∞ 滤波[1]与鲁棒滤波[2,3]引起人们普遍重视.

虽然文献[2,3]很好地解决了一类含有范数有界参数不确定系统在谱密度已知的白噪声作用下的滤波问题,但是当系统的噪声信号为未建模的外部干扰时,也即噪声信号可能是谱密度已知的白噪声,也可能是能量有界的外部干扰,文献[2,3]中的方法就不再适用了. 因而,本文对含有范数有界参数不确定的系统在受到未建模外部干扰作用时的滤波问题进行了研究. 首先,我们在满足一个给定的 H_∞ 估计误差约束下,给出了最坏情形 H_2 性能指标的一个上界; 然后利用 Lagrange 乘子法优化了该界,得到了一个使得该界达到最小意义上的最优滤波器; 最后,我们还用一个例子说明了本文方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + Bw(t), \tag{1}$$

$$y(t) = [C + \Delta C(t)]x(t) + Dw(t), \tag{2}$$

$$z(t) = Lx(t). \tag{3}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态,$w(t) \in \mathbb{R}^p$ 为未建模外部干扰信号,$y(t) \in \mathbb{R}^m$ 为测量输出,$z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为被估计量. A,B,C,D,L 为具有适当维数的已知名义系统矩阵. 而 $\Delta A(t),\Delta C(t)$ 表示系统的参数不确定,假定可容许的参数不确定为

$$[\Delta A(t) \quad \Delta C(t)] = [H_1 \quad H_2]F(t)E. \tag{4}$$

这里 $F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$ 为一个未知矩阵,满足

$$F(t)F^{\mathrm{T}}(t) \leqslant I_i, \quad \forall\, t. \tag{5}$$

而 H_1,H_2,E 为具有适当维数的已知矩阵. 假定 $DD^{\mathrm{T}} > 0$.

本文于 1996 年 10 月 8 日收到. 1997 年 4 月 22 日收到修改稿.

考虑如下一个 n 阶能控能观的滤波器

$$\dot{\hat{x}} = A_f\hat{x} + K_f y, \tag{6}$$

$$\hat{Z} = L\hat{x}. \tag{7}$$

我们的目的是确定滤波器参数矩阵 A_f, K_f，使得如下条件成立：

1) A_f 是渐近稳定的.

2) 若将 w 视为一个具有单位谱密度的白噪声信号，定义 $e = z - \hat{z}$，则最坏情形 H_2 性能指标

$$J(A_f, K_f) = \sup_F \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\{e^{\mathrm{T}}e\} \tag{8}$$

的一个上界达到最小. 这里 E 表示期望.

3) 若将 w 视为一个能量有界的干扰信号，定义 $\tilde{e} = Ne$，则

$$\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty < \gamma. \tag{9}$$

这里 $G_{\tilde{e}w}(s)$ 为 w 到 $\tilde{e}$ 的闭环传递函数，且 $\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}[G_{\tilde{e}w}(j\omega)]$，$\sigma_{\max}$ 表示最大奇异值. 而 $\gamma > 0$ 为一个给定的常数，称为 H_∞ 误差界.

由(1)～(3)以及(6)，(7)式构成的闭环系统可写为

$$\dot{\xi} = (A_c + H_cFE_c)\xi + B_c w, \tag{10}$$

$$e = L_c\xi. \tag{11}$$

其中

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ K_fC & A_f \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B \\ K_fD \end{bmatrix},$$

$$H_c = \begin{bmatrix} H_1 \\ K_fH_2 \end{bmatrix}, \quad E_c = [E \quad 0], \quad L_c = [L \quad -L],$$

则从 w 到 $\tilde{e}$ 的闭环传递函数 $G_{\tilde{e}w}(s)$ 为

$$G_{\tilde{e}w}(s) = NL_c(sI - A_c - H_cFE_c)^{-1}B_c. \tag{12}$$

若 $A_c + H_cFE_c$ 是渐近稳定的，则(8)式可写为

$$J(A_c, K_c) = \sup_F \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\{\xi^{\mathrm{T}}L_c^{\mathrm{T}}L_c\xi\} = \sup_F \mathrm{tr}\{\tilde{Q}L_c^{\mathrm{T}}L_c\}. \tag{13}$$

其中 tr 表示矩阵的迹，而 $\tilde{Q} = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{\xi\xi^{\mathrm{T}}\}$ 满足如下 Lyapunov 方程

$$(A_c + H_cFE_c)\tilde{Q} + \tilde{Q}(A_c + H_cFE_c)^{\mathrm{T}} + B_cB_c^{\mathrm{T}} = 0. \tag{14}$$

从文献[2]的引理 4.3 可知：若用 $\varepsilon\tilde{Q}E_c^{\mathrm{T}}E_c\tilde{Q} + \varepsilon^{-1}H_cH_c^{\mathrm{T}}$ 代替(14)式中的不确定项 $H_cFE_c\tilde{Q} + \tilde{Q}E_c^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H_c^{\mathrm{T}}$ 后，方程仍有一个稳定解 $\tilde{Q} = \tilde{Q}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，其中 $\varepsilon > 0$，则通过该解可以给出估计误差渐近方差的一个上界. 但为了满足(9)式所要求的 H_∞ 误差界，则需要另外一个修正 Riccati 方程. 令 $\bar{A} = A_c + P(\gamma^{-2}L_c^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}NL_c + \varepsilon E_c^{\mathrm{T}}E_c)$，我们有如下引理：

引理 1　考虑闭环系统(10)～(11)式，给定 $\gamma > 0$，则存在一个 $\varepsilon > 0$，使得方程

$$A_cP + PA_c^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}PL_c^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}NL_cP + \varepsilon PE_c^{\mathrm{T}}E_cP + \varepsilon^{-1}H_cH_c^{\mathrm{T}} + B_cB_c^{\mathrm{T}} = 0 \tag{15}$$

有一个稳定解 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$（也即 $\bar{A}$ 是渐近稳定的）；当且仅当 $A_c + H_cFE_c$ 是渐近稳定的，且 $\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty < \gamma$. 此时，对于所有可容许的参数不确定都有

$$J(A_f, K_f) \leqslant \mu. \tag{16}$$

其中

$$\mu = \mathrm{tr}\{PL_c^{\mathrm{T}}L_c\}. \tag{17}$$

证明见附录.

从引理 1 可知，若方程(15)式存在一个稳定非负定解，则对于所有可容许的参数不确定闭

环系统都是渐近稳定的，且满足一个给定的 H_∞ 误差界，同时通过该解为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个上界 μ，我们称 μ 为误差方差保证界.

3 具有 H_∞ 误差界的最优鲁棒滤波器设计

这一节里，我们要寻找一个满足给定的 H_∞ 估计误差约束，且使得误差方差保证界 μ 达到最小的滤波器，也就是考虑如下最小化问题：

(W)： 确定滤波器参数 A_f, K_f，使得 μ 在(15)式存在一个稳定解 $P = P^T \geqslant 0$ 的约束下达到最小.

假定方程(15)式存在一个稳定解 $P = P^T \geqslant 0$，我们用Lagrange乘子法来推导问题(W)的必要条件. 定义 $\Psi \triangleq [P \quad A_f \quad K_f]$，且令

$$G(\Psi) = A_cP + PA_c^T + \gamma^{-2}PL_c^TN^TNL_cP + \varepsilon PE_c^TE_cP + \varepsilon^{-1}H_cH_c^T + B_cB_c^T.$$

首先检验一下 $G(\Psi) = 0$ 是否有一个正则点 Ψ(见文献[4]附录). 因为

$$\partial \mathrm{tr}\{G(\Psi)\Pi\}/\partial\Psi = [\partial \mathrm{tr}\{G(\Psi)\Pi\}/\partial P \quad \partial \mathrm{tr}\{G(\Psi)\Pi\}/\partial A_f] \partial tr\{G(\Psi)\Pi\}/\partial kf].$$

而 $\partial \mathrm{tr}\{G(\Psi)\Pi\}/\partial P = \overline{A}^T\Pi + \Pi\overline{A} = 0$，又因 $\overline{A}$ 渐近稳定，故 Π 有唯一零解，因而满足正则条件. 令 $Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix} \geqslant 0$ 为 Lagrange 乘子，其中 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$，显然 $Q_2 \geqslant 0$，定义Lagrange 函数为

$$\Theta(A_f, K_f, P, Q) = \mathrm{tr}\{PL_c^TL_c + (A_cP + PA_c^T + \gamma^{-2}PL_c^TN^TNL_cP + \varepsilon PE_c^TE_cP + \varepsilon^{-1}H_cH_c^T + B_cB_c^T)Q\}.$$

由文献[4]的引理7可知：问题(W)有解的必要条件为

$$\frac{1}{2}(\partial\Theta/\partial A_f) = Q_{12}^TP_{12} + Q_2P_2 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}(\partial\Theta/\partial K_f) = (Q_{12}^TP_1 + Q_2P_{12}^T)C^T + Q_{12}^T(BD^T + \varepsilon^{-1}H_1H_2^T) + Q_2K_fV = 0, \tag{19}$$

$$\partial\Theta/\partial P = \overline{A}^TQ + Q\overline{A} + L_c^TL_c = 0, \tag{20}$$

$$\partial\Theta/\partial Q = A_cP + PA_c^T + \gamma^{-2}PL_c^TN^TNL_cP + \varepsilon PE_c^TE_cP + \varepsilon^{-1}H_cH_c^T + B_cB_c^T = 0. \tag{21}$$

其中 $V = DD^T + \varepsilon^{-1}H_2H_2^T$，$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix}$，且 $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$，这样可得如下定理：

定理1 问题(W)有解，当且仅当存在一个 $\varepsilon > 0$，使得方程

$$AP_1 + P_1A^T + \gamma^{-2}\overline{P}L^TN^TNL\overline{P} + \varepsilon P_1E^TEP_1 + \varepsilon^{-1}H_1H_1^T + BB^T = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &A\overline{P} + \overline{P}A^T + \varepsilon\overline{P}E^TE\overline{P} - (\overline{P}C^T + BD^T + \varepsilon^{-1}H_1H_2^T)V^{-1}(\overline{P}C^T + BD^T + \varepsilon^{-1}H_1H_2^T)^T \\ &\quad + \gamma^{-2}\overline{P}L^TN^TNL\overline{P} + BB^T + \varepsilon^{-1}H_1H_1^T = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

分别存在一个稳定解 $P_1 \geqslant 0$，$\overline{P} \geqslant 0$(也即 $A + \varepsilon P_1E^TE$ 与 $A_f + \gamma^{-2}\overline{P}L^TN^TNL$ 均是渐近稳定的，其中 A_f 由(24)式给出)，且滤波器参数为

$$A_f = A + \varepsilon\overline{P}E^TE - (\overline{P}C^T + BD^T + \varepsilon^{-1}H_1H_2^T)V^{-1}C, \tag{24}$$

$$K_f = (\overline{P}C^T + BD^T + \varepsilon^{-1}H_1H_2^T)V^{-1}. \tag{25}$$

此时，最优误差方差保证界 μ 为

$$\mu = \mathrm{tr}\{\overline{P}L^TL\}. \tag{26}$$

证明见附录.

如果 $A_c + H_cFE_c$ 是渐近稳定的，显然 A_c 是渐近稳定的，因而 A_f 是渐近稳定的. 由引理1以及定理1，很容易得到如下定理：

定理2 存在一个 $\varepsilon > 0$，使得方程(22)，(23)式分别存在一个稳定解 $P_1 \geqslant 0$，$\overline{P} \geqslant 0$，且滤

波器参数由(24),(25)式给出;当且仅当:

1) $A_c + H_c F E_c$ 是渐近稳定的;

2) $\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty < \gamma$;

3) 误差方差保证界 μ 达到最小. 此时由(24),(25)式给出的滤波器是渐近稳定的,且误差方差保证界 μ 由(26)式给出,同时 $J(A_f, K_f) \leqslant \mu$.

定理 2 的证明很容易从引理 1 以及定理 1 的证明中得出. 该定理说明:若存在一个 $\varepsilon > 0$,使得方程(22),(23)式分别存在一个稳定解 $P_1 \geqslant 0, \bar{P} \geqslant 0$,且滤波器参数由(24),(25)式给出,则该滤波器是渐近稳定的,且满足一个给定的 H∞ 误差界,同时为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优的上界. 显然,为了得到最优解,我们需要搜索参数 ε. 可以看出:定理 2 提供了一种克服未建模外部干扰以及模型参数不确定的鲁棒滤波器设计方法. 而且,若令 $\gamma \to \infty, BD^{\mathrm{T}} = 0$,则定理 2 中的鲁棒滤波器与文献[2]中无限时间鲁棒有偏滤波器的形式是一样的,若再令 $H_1 = 0, H_2 = 0, E = 0$,则可以得到标准的 Kalman 滤波结果.

4　仿真实例

考虑如下不确定系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1+\delta \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w, \ |\delta| \leqslant 0.3,$$
$$y = [-100 \quad 100] x + [0 \quad 1] w,$$
$$z = [1 \quad 0] x.$$

这里 w 是未建模外部干扰信号,δ 为模型的不确定参数,取 $H_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}, H_2 = 0, E = [0 \quad 0.3], N = 1$. 我们利用MATLAB中的Toolbox工具来进行仿真实验. 给定不同的γ值,可以得到方程(22),(23)式同时存在稳定解的ε取值区间以及最优误差方差保证界 μ,鲁棒滤波器的特性如表 1 所示.

表 1　鲁棒滤波器的特性

γ	ε 的取值区间	μ 的最优值	γ_{wc}
$+\infty$	(0,0.3285]	2.3123	3.6970
4.5	[0.08238,0.2601]	3.7155	3.2017
4.0278	[0.1530,0.1923]	5.4531	3.0126
4.010	[0.1692,0.1762]	5.9962	2.9813

表中 γ_{wc} 为最坏情形 $\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty$ 的实际值(在本例中 $\delta = 0.3$ 时,$\| G_{\tilde{e}w}(s) \|_\infty$ 取得最坏情形值). 可以看出:随着γ值的减小,相应的最优误差方差保证界μ会变大. 这说明降低 H∞ 误差界值需要牺牲最优误差方差保证界 μ 作为代价.

我们发现γ的最优值很接近于4.010,取$\gamma = 4.010$,则不同的ε值所对应的误差方差保证界 μ 如图 1 所示. 可以看出参数ε对μ有很大影响,且当$\varepsilon = 0.1762$时,μ达到最小,其值为 5.9962,相应的稳定鲁棒滤波器为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -70.8435 & 69.9385 \\ 313.4640 & -312.8685 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -0.7084 \\ 3.1246 \end{bmatrix} y,$$
$$\hat{z} = [1 \quad 0] \hat{x}.$$

此时 $|G_{\tilde{e}w}(j\omega)|$ 的频率响应曲线如图 2 所示,其中曲线 1 为 $\delta = -0.3$ 时的情形,曲线 2 为 $\delta = 0.3$ 时的情形.

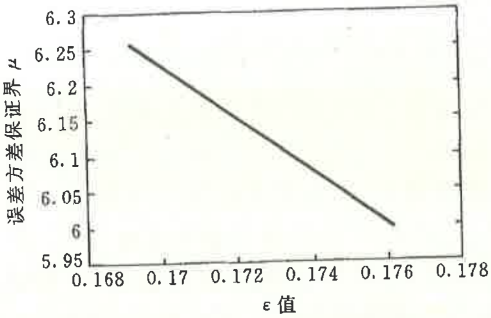

图 1 不同 ε 值所对应的误差方差保证界 μ

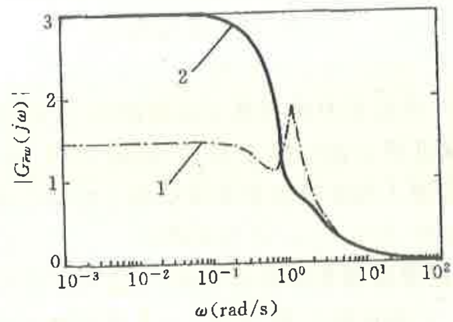

图 2 $|G_{\tilde{z}w}(j\omega)|$ 的频率响应曲线

5 结 论

本文对含有范数有界参数不确定的线性连续系统在受到未建模外部干扰作用时的滤波问题进行了研究，给出了一种克服范数有界参数不确定以及未建模外部干扰信号的鲁棒滤波器设计方法. 我们的结果与两个含有一个尺度参数的修正 Riccati 方程有关. 所得的滤波器对所有可容许的参数不确定都能满足一个给定的 H_∞ 误差界，且为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界. 仿真结果表明：H_∞ 误差界的降低需要牺牲最优误差方差保证界作为代价.

参 考 文 献

1 Nagpal, K. M. and Khargonekar, P. P.. Filtering and smoothing in an H^∞ setting. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(2): 152−166

2 Shaked, U. and Souza, C. E. de.. Robust minimum variance filtering. IEEE Trans. Signal Processing, 1995, 43(11): 2474−2483

3 Petersen, I. R. and McFarlane, D. C.. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(9): 1971−1977

4 Doyle, J. C., Zhou, K. Glover, K. and Bodenheimer, B.. Mixed H^2 and H^∞ performance objectives Ⅱ: optimal control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(8): 1575−1586

5 Petersen, I. R.. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems. IEE Proc-Control Theory Appl., 1995, 142(2): 95−102

6 Khargonekar, P. P., Petersen, I. R. and Zhou, K.. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H^∞ control theory. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35(3): 356−361

附 录

引理 1 的证明：

必要性 若(15)式有一个稳定解 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，从严格有界实引理(见文献[5]的引理 3.1)可知：总存在一个 $\tilde{P} > 0$，使得

$$A_c\tilde{P} + \tilde{P}A_c^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}\tilde{P}L_c^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}NL_c\tilde{P} + \varepsilon\tilde{P}E_c^{\mathrm{T}}E_c\tilde{P} + \varepsilon^{-1}H_cH_c^{\mathrm{T}} + B_cB_c^{\mathrm{T}} < 0 \tag{A1}$$

由(5)式及文献[6]的事实 A.1 可知：$H_cFE_c\tilde{P} + \tilde{P}E_c^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H_c^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon\tilde{P}E_c^{\mathrm{T}}E_c\tilde{P} + \varepsilon^{-1}H_cH_c^{\mathrm{T}}$，因而有

$$(A_c + H_cFE_c)\tilde{P} + \tilde{P}(A_c + H_cFE_c)^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}\tilde{P}L_c^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}NL_c\tilde{P} + B_cB_c^{\mathrm{T}} < 0. \tag{A2}$$

由严格有界实引理可知：$A_c + H_cFE_c$ 渐近稳定，且 $\| G_{\tilde{z}w}(s) \|_\infty < \gamma$. 必要性得证.

充分性 若 $A_c + H_cFE_c$ 是渐近稳定的，且 $\| G_{\tilde{z}w}(s) \|_\infty < \gamma$，则由严格有界实引理可知：总存在一个 $\tilde{P} > 0$，使得(A2) 式成立，故

$$x^{\mathrm{T}}(A_c\tilde{P} + \tilde{P}A_c^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}\tilde{P}L_c^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}NL_c\tilde{P} + B_cB_c^{\mathrm{T}})x + 2x^{\mathrm{T}}\tilde{P}E_c^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H_c^{\mathrm{T}}x < 0. \tag{A3}$$

从文献[6]的引理A.2可知：$\max(x^{\mathrm T}\widetilde{P}E_c^{\mathrm T}F^{\mathrm T}H_c^{\mathrm T}x) = \| E_c\widetilde{P}x \| \ \| H_c^{\mathrm T}x \|$，故由(A3)式可得

$$x^{\mathrm T}(A_c\widetilde{P} + \widetilde{P}A_c^{\mathrm T} + \gamma^{-2}\widetilde{P}L_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_c\widetilde{P} + B_cB_c^{\mathrm T})x + 2\| E_c\widetilde{P}x \| \ \| H_c^{\mathrm T}x \| < 0. \tag{A4}$$

由上式可以看出：$A_c\widetilde{P} + \widetilde{P}A_c^{\mathrm T} + \gamma^{-2}\widetilde{P}L_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_c\widetilde{P} + B_cB_c^{\mathrm T} < 0$，且

$$\{x^{\mathrm T}(A_c\widetilde{P}+\widetilde{P}A_c^{\mathrm T}+\gamma^{-2}\widetilde{P}L_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_c\widetilde{P}+B_cB_c^{\mathrm T})x\}^2 > 4x^{\mathrm T}\widetilde{P}E_c^{\mathrm T}E_c\widetilde{P}xx^{\mathrm T}H_cH_c^{\mathrm T}x.$$

从文献[6]的引理A.3可知：存在一个$\varepsilon>0$，使得

$$\varepsilon^2\widetilde{P}E_c^{\mathrm T}E_c\widetilde{P} + \varepsilon(A_c\widetilde{P} + \widetilde{P}A_c^{\mathrm T} + \gamma^{-2}\widetilde{P}L_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_c\widetilde{P} + B_cB_c^{\mathrm T}) + H_cH_c^{\mathrm T} < 0.$$

所以存在一个$\widetilde{P}>0$使得(A1)成立.由严格有界实引理立即可知：(15)式有一个稳定解$P=P^{\mathrm T}\geqslant 0$.充分性得证.

令$M = \varepsilon PE_c^{\mathrm T}E_cP + \varepsilon^{-1}H_cH_c^{\mathrm T} - (H_cFE_cP + PE_c^{\mathrm T}F^{\mathrm T}H_c^{\mathrm T})$，显然$M\geqslant 0$，则(15)式可化为

$$(A_c + H_cFE_c)P + P(A_c + H_cFE_c)^{\mathrm T} + \gamma^{-2}PL_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_cP + B_cB_c^{\mathrm T} + M = 0. \tag{A5}$$

用(A5)式减去(14)式可得

$$(A_c + H_cFE_c)(P - \widetilde{Q}) + (P - \widetilde{Q})(A_c + H_cFE_c)^{\mathrm T} + \gamma^{-2}PL_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_cP + M = 0.$$

因为$P\geqslant 0, M\geqslant 0$，且$A_c + H_cFE_c$是渐近稳定的，所以

$$P - \widetilde{Q} = \int_0^\infty e^{(A_c+H_cFE_c)t}(\gamma^{-2}PL_c^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL_cP + M)e^{(A_c+H_cFE_c)^{\mathrm T}t}\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

故$0\leqslant\widetilde{Q}\leqslant P$，故(16)式成立.　　证毕.

定理1的证明：

必要性　若问题(W)有解，取$Q_{12}=-Q_2, P_{12}=P_2$，显然(18)式满足，这意味着当$\gamma\to\infty$，且(16)式中的等号成立时，状态估计误差$x-\hat{x}$与x的估计量$\hat{x}$不相关.令$\overline{P}=P_1-P_2, \overline{Q}=Q_1-Q_2$，则(20)式可分解为

$$A^{\mathrm T}Q_1 + Q_1A + \varepsilon E^{\mathrm T}E(P_1\overline{Q} + \overline{P}Q_2) + \varepsilon(\overline{Q}P_1 + Q_2\overline{P})E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL\overline{P}Q_1 + \gamma^{-2}Q_1\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL$$
$$- C^{\mathrm T}K_f^{\mathrm T}Q_2 - Q_2K_fC + L^{\mathrm T}L = 0, \tag{A6}$$

$$A^{\mathrm T}Q_{12} + Q_{12}A_f - (\varepsilon E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL)\overline{P}Q_2 - \gamma^{-2}Q_1\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL + C^{\mathrm T}K_f^{\mathrm T}Q_2 - L^{\mathrm T}L = 0, \tag{A7}$$

$$(A_f + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL)^{\mathrm T}Q_2 + Q_2(A_f + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL) + L^{\mathrm T}L = 0. \tag{A8}$$

因(A_f,L)能观，故$(A_f + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL, L)$也能观，又因$Q_2\geqslant 0$，所以$Q_2>0$，由(19)式可得(25)式，而(21)式可分解为

$$AP_1 + P_1A^{\mathrm T} + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL\overline{P} + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}EP_1 + \varepsilon^{-1}H_1H_1^{\mathrm T} + BB^{\mathrm T} = 0, \tag{A9}$$

$$AP_{12} + P_1C^{\mathrm T}K_f^{\mathrm T} + P_{12}A_f^{\mathrm T} + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}EP_{12} + (BD^{\mathrm T} + \varepsilon^{-1}H_1H_2^{\mathrm T})K_f^{\mathrm T} = 0, \tag{A10}$$

$$A_fP_2 + K_fCP_{12} + P_{12}^{\mathrm T}C^{\mathrm T}K_f^{\mathrm T} + P_2A_f^{\mathrm T} + \varepsilon P_{12}^{\mathrm T}E^{\mathrm T}EP_{12} + K_fVK_f^{\mathrm T} = 0. \tag{A11}$$

显然(A11)式可写为

$$(A_f + K_fCP_{12}P_2^+)P_2 + P_2(A_f + K_fCP_{12}P_2^+)^{\mathrm T} + \varepsilon P_{12}^{\mathrm T}E^{\mathrm T}EP_{12} + K_fVK_f^{\mathrm T} = 0.$$

其中P_2^+为P_2的伪逆.因$P\geqslant 0$，显然$P_1\geqslant 0, \overline{P}\geqslant 0, P_2\geqslant 0$，又因$(A_f,K_f)$能控，故$(A_f + K_fCP_{12}P_2^+, K_f)$也能控，因而$P_2>0$.则用(A10)式减去(A11)式可得(24)式.利用(24)与(25)式，则(A9)式减去(A10)式可得(23)式.而(A9)式与(22)式相同.

因为$\overline{A}$是渐近稳定的，考虑到(24)，(25)式，则$\overline{A}$相似于矩阵

$$U\overline{A}U^{-1} = \begin{bmatrix} A + \varepsilon\overline{P}E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL - K_fC & 0 \\ K_fC + \varepsilon P_2E^{\mathrm T}E & A + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}E \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } U = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

所以$A + \varepsilon\overline{P}E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL - K_fC$与$A + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}E$均是渐近稳定的.用(A6)式减去(A8)式或(A6)式加上(A7)式可得

$$(A + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL)^{\mathrm T}\overline{Q} + \overline{Q}(A + \varepsilon P_1E^{\mathrm T}E + \gamma^{-2}\overline{P}L^{\mathrm T}N^{\mathrm T}NL) = 0,$$

显然有$\overline{Q}=0$.由(17)式可知，此时误差方差保证界$\mu = \mathrm{tr}\{\overline{P}L^{\mathrm T}L\}$.

充分性　如果存在一个$\varepsilon>0$，使得方程(22)，(23)式分别存在一个稳定解$P_1\geqslant 0, \overline{P}\geqslant 0$，且滤波器参数由(24)，(25)式给出，我们取

$$Q = \begin{bmatrix} Q_2 & -Q_2 \\ -Q_2 & Q_2 \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad Q_2 > 0, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_1 - \overline{P} \\ P_1 - \overline{P} & P_1 - \overline{P} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

很容易验证 P 为方程(15)式的一个稳定解，且 P 与 Q 满足问题(W)有解的必要条件. 由(17)式可知，此时误差方差保证界 $\mu=\mathrm{tr}\{\bar{P}L^{\mathrm{T}}L\}$.　　证毕.

Robust Minimum Variance Filtering with an H_∞ Error Bound

WU Huaining
(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology · Bejing, 100081, PRC)
XIE Kainian　and　YOU Changde
(Institute of Automatic Control, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)
FEI Yuanchun
(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology · Bejing, 100081, PRC)

Abstract: This paper studies the robust minimum variance filtering problem for linear continuous-time systems that are subjected to norm-bounded parameter uncertainty and impinged by unmodelled external disturbances. An upper bound for the worst-case H_2 performance index is obtained under the condition of satisfying a prespecified H_∞ estimation error constraint, and the optimal filter is designed in the sense of minimizing the bound. The filter derived is guaranteed to satisfy a prespecified H_∞ error bound for all admissible parameter uncertainties, while providing an optimized bound for the worst-case H_2 performance.

Key words: H_∞ norm; minimum variance filtering; algebraic Riccati equation; robustness

本文作者简介

吴淮宁　1972年生. 1992年毕业于山东建材学院自动化系获学士学位，1997年于西安交通大学电信学院自控研究所获博士学位，现为北京理工大学电子工程系博士后. 主要研究方向为 H_∞ 控制与估计，鲁棒控制与滤波，自适应数字波束形成.

谢凯年　1971年生. 1992年于西安交通大学信控系获学士学位，1997年于西安交通大学电信学院自控研究所获博士学位. 主要研究方向为机器人控制，传感器.

尤昌德　1937年生. 现为西安交通大学电信学院自动控制系教授，博士生导师. 研究领域为现代控制理论与应用.

费元春　1938年生. 现为北京理工大学电子工程系教授，博士生导师. 研究领域为微波频率源.