第 15 卷第 2 期　　控制理论与应用　　Vol. 15, No. 2
1998 年 4 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Apr., 1998

离散加工系统反馈控制的代数综合方法*

朱更新　郑大钟
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要: 本文研究离散加工系统中异步并发活动的控制与协调问题. 系统采用具有外部输入位置的受控标识图描述. 通过对外部输入位置中令牌数目的控制,使系统不进入禁止状态集,同时具有最大限度的柔性. 系统的逻辑行为用极小代数描述,并由此得到一步允许无冗余控制策略.

关键词: 离散加工系统; 监督控制; 标识图; 极小代数

1 引　　言

离散加工系统由多个局部控制的子系统构成,如机器、传输装置、缓存库等. 为保证加工活动的安全、正确和高效率,须引入监督控制器协调各个局部子系统. 文献中已经提出了多种综合反馈控制方法,如 Ramadge 和 Wonham 的形式语言与自动机方法[1],Holloway 和 Krogh 的标识图与谓词演算方法[2,3]. 前者将状态空间一维化,计算量大,应用中受到限制;后者采用标识图模型,保留系统结构,克服了前者缺点,但只研究一类特殊的安全[5]循环标识图. 本文研究一般标识图模型,通过控制向外部位置中输入令牌数目,保证系统不进入禁止状态集.

Cohen 利用 Diod(即[6]的 Belt),建立了赋时标识图的"线性"状态方程,并分析了系统性能[4]. 本文利用极小代数(Diod 的一种),来建立非赋时标识图逻辑行为的"线性"描述,并用于反馈控制逻辑的综合. 此外,本文提出的代数综合方法与[7]不同,[7]研究的是无竞争无回路 Petri 网,使用的代数体系不是 Diod.

2 系统的标识图模型

离散加工系统中的异步并发过程可用标识图模型来描述. 标识图是一类特殊 Petri 网,每个位置有唯一输入弧和输出弧. 用三元组 $MG=(P,T,\Psi)$ 表示一个标识图,P 是位置集,T 是转换集,$\Psi: P\to T\times T$ 是系统结构. $\forall\ p\in P, \Psi(p)=({}^{\cdot}p, p^{\cdot})\in T\times T$, ${}^{\cdot}p$ 和 $p^{\cdot}$ 表示 p 的输入和输出转换. 受控标识图用五元组 $CMG=(P,T,\Psi,Q,\omega)$ 表示,标识图 $MG=(P,T,\Psi)$ 为受控制对象,Q 是外部位置集(MG 的位置 $p\in P$ 为内部位置),$\omega: Q\to T$ 是控制结构. $\forall\ q\in Q, \omega(q)=q^{\cdot}\in T$, $q^{\cdot}$ 表示 q 的输出转换,定义 $T_c=\{t\in T\,|\,t=q^{\cdot}, q\in Q\}$, $T_u=T\backslash T_C$, T_C 和 T_u 的元素分别为受控和非受控转换.

受控标识图 CMG 的状态用标识 (m,v) 表示,内部标识 $m: P\to N$ 和外部标识 $v: Q\to N$ 指示当前内部和外部位置中的令牌分布,N 是非负整数集. 外部标识 v 代表控制器的状态,通过向外部位置中投放或收回令牌可将 v 变为 v'. $\Delta v=v'-v$ 为控制增量. 内部标识代表受控对象的状态,不能直接向内部位置中投放或收回令牌.

$\forall\ t\in T$,定义 ${}^{(p)}t=\{p\in P\,|\,p^{\cdot}=t\}$, $t^{(p)}=\{p\in P\,|\,{}^{\cdot}p=t\}$, ${}^{(q)}t=\{q\in Q\,|\,q^{\cdot}=t\}$,规定 ${}^{(q)}t$ 最多有一个元素. 称转换 t 是 k 次内部使能,如果 $\forall\ p\in{}^{(p)}t, m(p)\geqslant k, k\in\mathbb{N}^+$ (正整数集). 称 t 是 k 次外部使能,如果 $\forall\ q\in Q, v(q)\geqslant k$. 约定非受控转换是任意次外部使能的. 称 t 是 k 次使能,如果 t 同时是 k 次内部和外部使能的.

* 国家自然科学基金(69684001)、国家攀登计划和教委博士点基金资助项目.
本文于 1994 年 11 月 24 日收到. 1997 年 7 月 10 日收到修改稿.

称受控标识图 CMG 的一个并发活动 $S \subset T \times \mathbb{N}^+$ 在标识 (m,v) 下可发射，如果 $\forall (t,k) \in S$，t 是 k 次使能的.

并发活动 S 发射后，标识 (m,v) 变为 (m',v')，记为 $(m,v)[S \Rightarrow (m',v')$. (m',v') 由下式决定

$$m'(p) = m(p) - k_s(p^{\cdot}) + k_s({}^{\cdot}p), \quad \forall p \in P, \tag{1}$$

$$v'(q) = v(q) - k_s(q^{\cdot}), \quad \forall q \in Q. \tag{2}$$

其中

$$k_s(t) = \begin{cases} i, & (t,i) \in S, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \quad \forall t \in T, \quad S \subset T \times \mathbb{N}^+ \tag{3}$$

代表在并发活动 S 中转换 t 发生的次数.

并发活动序列 $\sigma = (S_0, \cdots, S_{n-1})$ 称为标识 (m_0,v_0) 下的有效发射序列，如果 $S_j \subset T \times \mathbb{N}^+$ 是标识 (m_j,v_j) 下可发射的，(m_0,v_0) 为初始标识. (m_j,v_j) 由下式决定

$$(m_{j-1},v_{j-1})[S_{j-1} \Rightarrow (m_j,v_j), \quad j = 1,\cdots,n.$$

n 称为序列 σ 的长度，记作 $|\sigma| = n$. 用 1 表示空序列，当 $\sigma = 1$ 时，$|\sigma| = 0$.

设标识 (m,v) 下有效发射序列 σ 发射后的标识为 (m',v')，则记 $(m,v)[\sigma \Rightarrow (m',v')$. 定义 n 步内可达集 $R^{(n)}(m,v)$ 和任意步可达集 $R(m,v)$ 为

$$R^{(n)}(m,v) = \{(m',v') \mid (m,v)[\sigma \Rightarrow (m',v'), |\sigma| \leqslant n\}, \quad R(m,v) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} R^{(n)}(m,v).$$

$R^{(n)}(m,v)$ 和 $R(m,v)$ 在内部标识上的投影分别定义为

$$R_I^{(n)}(m,v) = \{m' \mid (m',v') \in R^{(n)}(m,v)\}, \quad R_I(m,v) = \{m' \mid (m',v') \in R(m,v)\}.$$

3 系统的结构能控性与平衡点

受控标识图 CMG 中，称转换 $t \in T$ 为结构能控，如果存在 $q \in Q$，从 q 到 t 至少有一条通路[4]. 称 CMG 为结构完全能控，如果每个转换 $t \in T$ 均为结构能控.

引理 1 如果 $t \in T$ 为结构能控，则对任意初始标识 (m_0,v_0)，存在 $K \in \mathbb{N}^+$，对 (m_0,v_0) 下任意有效发射序列 $\sigma = (S_0,\cdots,S_{n-1})$，转换 t 在 σ 中发生的次数 $k_\sigma(t) \leqslant K$，这里

$$k_\sigma(t) = \sum_{j=0}^{n-1} k_{sj}(t). \tag{4}$$

证 已知 t 为结构能控，则存在一条通路 $\pi = (qp_0 \cdots p_{r-1})$，$q \in Q$，$p_{r-1}^{\cdot} = t$，$p_0,\cdots,p_{r-1} \in P$. 令

$$(m_j,v_j)[S_j \Rightarrow (m_{j+1},v_{j+1}), \quad j = 0,\cdots,n-1. \tag{5}$$

定义标识 (m_j,v_j) 下通路 π 的权重为

$$W_j(\pi) = v_j(q) + \sum_{i=0}^{r-1} m_j(p_i), \quad j = 0,\cdots,n. \tag{6}$$

根据(1)和(2)

$$W_{j+1}(\pi) = W_j(\pi) - k_{sj}(q^{\cdot}) + \sum_{i=0}^{r-1} [k_{sj}({}^{\cdot}p_i) - k_{sj}(p_i^{\cdot})], \quad j = 0,\cdots,n-1. \tag{7}$$

注意到 $q^{\cdot} = {}^{\cdot}p_0$，$p_i^{\cdot} = {}^{\cdot}p_{i+1}$，$i = 0,\cdots,r-2$，$p_{r-1}^{\cdot} = t$，由(7)得

$$W_{j+1}(\pi) = W_j(\pi) - k_{sj}(t), \quad j = 0,\cdots,n-1, \tag{8}$$

于是

$$W_n(\pi) = W_0(\pi) - \sum_{j=0}^{n-1} k_{sj}(t) = W_0(\pi) - k_\sigma(t).$$

令 $K = W_0(\pi)$，由 $W_n(\pi) \geqslant 0$ 得 $k_\sigma(t) \leqslant K$. 证毕.

结构完全能控受控标识图的一个重要性质是必可在有限步内到达平衡点.

定义 1　标识(m,v)是受控标识图 CMG 的一平衡点，如果标识(m,v)下所有转换$t\in T$都不是(一次)使能的.

定理 1　如果受控标识图 CMG 为结构完全能控，则对任意初始标识(m_0,v_0)，CMG 必可经过有限步发射到达平衡点，即

1° 存在$K\in\mathbb{N}$，标识(m_0,v_0)下的任意一个有效发射序列σ满足$|\sigma|\leqslant K$；

2° 存在有效发射序列σ将标识(m_0,v_0)迁移到平衡点(m_e,v_e)，即$(m_0,v_0)[\sigma\Rightarrow(m_e,v_e)$.

证　CMG 结构完全能控意味着，$\forall\, t\in T$，t为结构能控. 据引理 1，存在$K_t\in\mathbb{N}$，$k_\sigma(t)\leqslant K_t$. 于是$|\sigma|\leqslant\sum\limits_{t\in T}k_\sigma(t)\leqslant\sum\limits_{t\in T}K_t=K$. 1° 得证.

如(m_0,v_0)不是平衡点，于是存在并发活动S_0，$(m_0,v_0)[S_0\Rightarrow(m_1,v_1)$. 依此，如$(m_j,v_j)$不是平衡点，则存在并发活动$S_j$，$(m_j,v_j)[S_j\Rightarrow(m_{j+1},v_{j+1})$. 据 1°，过程一定在有限步结束，即存在$n\in\mathbb{N}$，$(m_n,v_n)$是平衡点. 令$\sigma=(S_0,\cdots,S_{n-1})$，$(m_e,v_e)=(m_n,v_n)$. 得 2°.　　证毕.

设$(m,v)[\sigma\Rightarrow(m_e,v_e)$，$(m_e,v_e)$是平衡点. 下面研究初始标识迁移到平衡点过程中每个转换$t\in T$发射的次数$k_\sigma(t)$.

据定理 1

$$k_\sigma(t)=\sum_{p\in{}^{(p)}t}{}_{\otimes'}m(p)\otimes'k_\sigma({}^{\cdot}p)\oplus'\sum_{q\in{}^{(q)}t}{}_{\oplus'}v(q).\tag{9}$$

其中，$\oplus'$和$\otimes'$为极小代数下的运算

$$a\oplus'b=\min\{a,b\},\quad a\otimes'b=a+b,\quad\forall\, a,b\in\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}^+\cup\{+\infty\}.\tag{10}$$

设$Q=\{q_1,\cdots,q_\alpha\}$，$T=\{t_1,\cdots,t_\mu\}$. 令$v_j=v(q_j)$，$j=1,\cdots,\alpha$；$x_i=k_\sigma(t_i)$，$i=1,\cdots,\mu$. 向量$v=(v_1,\cdots,v_\alpha)^{\mathrm{T}}$，$x=(x_1,\cdots,x_\mu)^{\mathrm{T}}$，矩阵$A_{\mu\times\mu}$和$B_{\mu\times\alpha}$的元素定义如下

$$a_{ij}=\begin{cases}m(p), & p^{\cdot}=t_i,\quad {}^{\cdot}p=t_j,\\ +\infty, & \text{否则},\end{cases}\qquad i,j=1,\cdots,\mu;\tag{11}$$

$$b_{ij}=\begin{cases}0, & q_j^{\cdot}=t_i\\ +\infty, & \text{否则},\end{cases}\qquad i=1,\cdots,\mu,\quad j=1,\cdots,\alpha.\tag{12}$$

于是(9)可写为

$$x_i=\sum_{j=1}^{\mu}{}_{\oplus'}(a_{ij}\otimes'x_j)\oplus'\sum_{j=1}^{\alpha}{}_{\oplus'}(b_{ij}\otimes'v_j),\quad i=1,\cdots,\alpha.\tag{13}$$

其矩阵表达式为

$$x=A\otimes'x\oplus'B\otimes'v.\tag{14}$$

若将x的分量排列为x_c和x_u，分别对应受控转换T_c和非受控转换T_u，则有

$$\begin{bmatrix}x_c\\x_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{cc}&A_{cu}\\A_{uc}&A_{uu}\end{bmatrix}\otimes'\begin{bmatrix}x_c\\x_u\end{bmatrix}\oplus'\begin{bmatrix}B_c\\\Phi\end{bmatrix}\otimes'v.\tag{15}$$

其中，Φ是极小代数上的零矩阵，其所有元素都等于$+\infty$(零元).

为解方程(14)，需要用到标识图的活性[5]. 标识图 MG 的标识m是活的，当且仅当标识m下，MG 每个回路中至少含有一个令牌[5]. 记 MG 的活内部标识集为$L(\mathrm{MG})$.

引理 2　如果受控标识图 CMG 的一个标识$m\in L(\mathrm{MG})$，则方程(14)存在唯一解

$$x=\Gamma(A)\otimes'B\otimes'v,\quad \Gamma(A)=\sum_{i=0}^{\mu-1}{}_{\oplus'}A^i\tag{16}$$

证　见附录.

据引理 2，可得到如下定理.

定理 2 设受控标识图 CMG 为结构完全能控，给定初始标识 (m,v)，$m \in L(\mathrm{MG})$. 则对将标识(m,v)迁移到平衡点的任一有效发射序列σ，$\forall\ t \in T$，转换t发生的次数$k_\sigma(t)$只取决于初始标识(m,v)，而与具体σ无关.

$\forall\ t \in T$，与σ无关的$k_\sigma(t)$记为$k(t)$. 对一般的有效发射序列σ，$k_\sigma(t)$与σ有关，对此有如下定理.

定理 3 设受控标识图CMG为结构完全能控，给定标识(m,v)，$m \in L(\mathrm{MG})$，则对(m,v)下的任一有效发射序列σ，$k_\sigma(t) \leqslant k(t)$，$\forall\ t \in T$.

证 设$(m,v)[\sigma \Rightarrow (m',v')$，若$(m',v')$是平衡点，据定理2，$k_\sigma(t) = k(t)$，$\forall\ t \in T$. 若$(m',v')$不是平衡点，据定理1，存在有效发射序列$\sigma'$，$(m',v')[\sigma' \Rightarrow (m_e,v_e)$. 令$\bar{\sigma} = \sigma'\sigma$，则有

$$k_\sigma(t) \leqslant k_{\bar{\sigma}}(t) = k(t), \quad \forall\ t \in T. \tag{17}$$

4 反馈控制逻辑的综合

离散加工系统控制中，资源冲突、死锁、缓存器溢出等应属于禁止状态. 反馈控制的目标是保证系统不进入禁止状态集. 下面先引入控制逻辑综合中要用到的一些概念.

给定受控对象 MG 的禁止状态集 M，定义允许状态集[2]

$$\widetilde{M} = \{m \in L(MG) \mid R_I(m,0) \cap M = \varnothing\}. \tag{18}$$

定义 2 称Δv是标识(m,v)下的n步允许控制增量，如果$R_I^n(m,v+\Delta V) \subseteq \widetilde{M}$，即在$n$步内受控对象不越出允许状态集.

反馈控制逻辑应在保证受控对象处于允许状态前提下，使系统具有最大限度的柔性. 下面引入用以描述系统柔性的集合.

定义 3 受控标识图 CMG 在给定标识(m,v)下的并发活动集定义为

$$\tau(m,v) = \{S \mid S \subset T \times \mathbb{N}^+，且\ S\ 在标识(m,v)下可发射\}.$$

集合$\tau(m,v)$越大，外部标识v对受控对象的限制越小，系统具有更大的柔性. 显然，若$v_1 \leqslant v_2$，则$\tau(m,v_1) \subseteq \tau(m,v_2)$. 其中$\leqslant$是外部标识集上的偏序[2]，定义如下

$v_1 \leqslant v_2$，当且仅当：$\forall\ q \in Q$，$v_1(q) \leqslant v_2(q)$. 若同时有$v_1 \neq v_2$，则记为$v_1 < v_2$.

定义 4 称受控标识图CMG在标识(m,v)下的控制增量Δv有冗余，如果存在$\Delta v' < \Delta v$，使得$\tau(m,v+\Delta v') = \tau(m,v+\Delta v)$.

给定内部标识m，向量$\delta(m) = (\delta_1(m),\cdots,\delta_\alpha(m))^{\mathrm{T}}$定义为

$$\delta_i(m) = \sum_{p \in {}^{(p)}t} m(p), \quad 其中\ t = q_i^{\cdot}, \quad i = 1,\cdots,\alpha. \tag{19}$$

根据定义，下面的引理显然.

引理 3 Δv是CMG在标识(m,v)下的无冗余控制增量，当且仅当$v + \Delta v \leqslant \delta(m)$.

给定受控标识图CMG的标识(m,v)，据(19)，若$v \leqslant \delta(m)$，则去掉CMG的所有受控转换的内部输入位置p，$p \in {}^{(p)}t$，$t \in T_c$，不会影响向量$x(m,v)$的值. 这等价于(15)中的矩阵块A_{cc}和A_{cu}可用零矩阵Φ代替，即有

$$\begin{bmatrix} x_c \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ A_{uc} & A_{uu} \end{bmatrix} \otimes' \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \end{bmatrix} \oplus' \begin{bmatrix} B_c \\ \Phi \end{bmatrix} \otimes' v. \tag{20}$$

冗余控制的物理含义是：外部位置中存在多余令牌，其存在不增加系统当前状态下的柔性，应当由系统下一状态的控制策略决定是否允许存在. 但由于存在控制时延，当前外部位置中的多余令牌可能在下一步控制策略起作用之前被吸收，会对控制造成不利.

反馈控制逻辑综合的任务是寻找一步允许无冗余控制增量. 为此采用[3]给出的对象 MG

的禁止状态集 M 的描述

$$M_{(F,K)} = \{m \in L(MG) \mid \sum_{p\in F} m(p) > K\}. \tag{21}$$

下面针对(21)综合控制器,其中要求 F 满足分割条件.

定义 5 称给定集合 $F \subseteq P$ 满足分割条件,如果 $\forall\ p, p' \in F$,从 p 到 p' 的每一条通路($p \neq p'$)或回路($p = p'$)$\pi = (p_0 \cdots p_{r-1})$,其中 $p_0 = p, p_{r-1} = p'$,存在 $j \in \{0, \cdots, r-1\}$,满足 $p_j^{\cdot} = {}^{\cdot}p_{j+1} \in T_c$,即 π 被一个受控转换分割.

据定义,下面的引理显然.

引理 4 集合 $F \subseteq P$ 满足分割条件,当且仅当在受控标识图 CMG 中去掉全部受控转换结点及相关联的弧后得到的非受控子图中,$\forall\ p, p' \in F$,从 p 到 p' 不存在通路.

一个图中两结点间通路的存在性可用(16)的矩阵 Γ 判别[6].

令 $F = \{f_1, \cdots, f_\beta\}$,记 $y_i = k({}^{\cdot}f_i)$ 为输出,$i = 1, \cdots, \beta$. 输出向量 $y = (y_1, \cdots, y_\beta)^{\mathrm{T}}$,于是 $y = C \otimes' x$,其中 $\beta \times \mu$,($\mu = \dim x$) 矩阵 C 的元素为

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & {}^{\cdot}f_i = t_j, \\ +\infty, & \text{否则}, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, \beta, \quad j = 1, \cdots, \mu. \tag{22}$$

据引理 2 知,$y = H \otimes' v, H = C \otimes' \Gamma(A) \otimes' B$. 考虑到 A 由 m 决定,故 H 由 m 决定,相应地 y 由 (m, v) 决定,记作 $y(m, v) = H(m) \otimes' v$.

以下约定:受控标识图 CMG 为结构完全能控;标识 (m, v) 满足 $m \in L(\mathrm{MG})$(活标集),$v \leqslant \delta(m)$;禁止状态集 $M = M_{(F,K)}$,F 满足分割条件,$F^{\cdot} = \{f_1^{\cdot}, \cdots, f_\beta^{\cdot}\} \subseteq T_u$.

在此条件下可导出综合反馈控制逻辑的如下三个定理.

定理 4 给定 CMG 的标识 (m, v),则对可达集 $R(m, v)$ 在内部标识上的投影 $R_I(m, v)$,$R_I(m, v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$ 的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{\beta} y_i(m, v) \leqslant K - \sum_{i=1}^{\beta} m(f_i). \tag{23}$$

证 充分性. 已知(23)成立,任取 $m_1 \in R_I(m, v)$,令 $(m, v)[\sigma \Rightarrow (m_1, v_1)$,于是

$$\begin{aligned} m_1(f_i) &= m(f_i) + k_\sigma({}^{\cdot}f_i) - k_\sigma(f_i^{\cdot}) \\ &\leqslant m(f_i) + k_\sigma({}^{\cdot}f_i) \\ &\leqslant m(f_i) + y_i(m, v), \quad i = 1, \cdots, \beta, \quad (\text{据定理 } 3) \end{aligned} \tag{24}$$

现将(24)对 i 求和,得

$$\sum_{i=1}^{\beta} m_1(f_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\beta} m(f_i) + \sum_{i=1}^{\beta} y_i(m, v) \leqslant K, (\text{由}(23))$$

因此 $m_1 \notin M_{(F,K)}$. 再由 m_1 的任取性即知 $R_I(m, v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$. 充分性得证.

必要性. 已知 $R_I(m, v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$. 由 $v \leqslant \delta(m)$,有(20). 引入 $f_i^{\cdot} \in T_u$ 的辅助输入位置 q_i',$i = 1, \cdots, \beta$. 令 $Q' = \{q_1', \cdots, q_\beta'\}$,类似于外部标识 v,对应地有辅助标识 $w: Q' \to N$. 令 $w_i = w(q_i')$,$i = 1, \cdots, \beta$,向量 $w = (w_1, \cdots, w_\beta)^{\mathrm{T}}$,于是有

$$\begin{bmatrix} x_c \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ A_{uc} & A_{uu} \end{bmatrix} \otimes' \begin{bmatrix} x_c \\ x_u \end{bmatrix} \oplus' \begin{bmatrix} B_c & \Phi \\ \Phi & B_u \end{bmatrix} \otimes' \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}. \tag{25}$$

其中矩阵 B_u 类似于(12)中矩阵 B 的定义,从略. 令

$$y = C_c \otimes' x_c \oplus' C_u \otimes' x_u, \tag{26}$$

由(25)和(26)得:$y = H \otimes' v \oplus' H_a \otimes' w$,其中

$$H = (C_c \oplus {}'C_u \otimes {}'\Gamma(A_{uu}) \otimes {}'A_{uc}) \otimes {}'B_c, \tag{27}$$

$$H_a = C_u \otimes {}'\Gamma(A_{uu}) \otimes {}'B_u. \tag{28}$$

由于F满足分割条件，据引理4，在非受控子图中从w_j至y_i(对应结点)不存在通路，$i,j = 1,\cdots,\beta$. 再由图与矩阵的关系知$H_a = \Phi$(极小代数上的零矩阵). 因此$y(m,v,w) = y(m,v)$.

据定理1，存在有效发射序列σ，使得$(m,v,w)[\sigma \Rightarrow (m',v',w')$，其中$w = w' = 0$，$(m',v',w')$是平衡点. 由$w = 0$知$k_\sigma(f_i) = 0, i = 1,\cdots,\beta$，于是

$$\begin{aligned} m'(f_i) &= m(f_i) + k_\sigma({}^{\cdot}f_i) - k_\sigma(f_i^{\cdot}) = m(f_i) + k_\sigma({}^{\cdot}f_i) \\ &= m(f_i) + y_i(m,v,w) = m(f_i) + y_i(m,v), \quad i = 1,\cdots,\beta. \end{aligned} \tag{29}$$

由于$R_I(m,v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$，$m' \in R_I(m,v)$，因此$m' \notin M_{(F,K)}$，即$\sum_{i=1}^{\beta} m'(f_i) \leqslant K$，将(29)代入即得(23). 必要性得证. 证毕.

定理 5 设$v + \Delta v \leqslant \delta(m)$，即$\Delta v$是标识$(m,v)$下无冗余的，则下面的条件等价：

1° Δv是标识(m,v)下的一步允许控制增量.

2° $R_I(m,v+\Delta v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$.

证 2°⇒1°. 已知2°. 任取$m_1 \in R_I^{(1)}(m,v+\Delta v)$，$(m,v+\Delta v)[S \Rightarrow (m_1,v_1)$，于是

$$R_I(m_1,0) \subseteq R_I(m_1,v_1) \subseteq R_I(m,v+\Delta v). \tag{30}$$

因此，当$R_I(m,v+\Delta v) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$时，$R_I(m_1,0) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$，即$m_1 \in \widetilde{M}_{(F,K)}$(允许集). 由$m_1$的任取性，知$R_I^{(1)}(m,v+\Delta v) \subseteq \widetilde{M}_{(F,K)}$. 据定义2，得1°.

1°⇒2° 设1°成立. 任取$m' \in R_I(m,v+\Delta v)$，$(m,v+\Delta v)[\sigma \Rightarrow (m',v')$，其中$\sigma = (S_0,\cdots,S_{n-1})$，定义序列$\sigma' = (S'_c, S'_0,\cdots,S'_{n-1})$如下：

$$S'_c = \bigcup_{i=0}^{n-1}\{(t;k) \in S_i \mid t \in T_c\}, \quad S'_i = \{(t,k) \in S_i \mid t \in T_u\}, \quad i = 0,\cdots,n-1. \tag{31}$$

由于$v + \Delta v \leqslant \delta(m)$，受控转换能否发射指定次数由外部位置中的令牌数唯一确定，与其它转换是否发射无关. 因此(31)所定义的σ'是标识$(m,v+\Delta v)$下的有效发射序列，且$(m,v+\Delta v)[\sigma' \Rightarrow (m',v')$.

令$(m,v+\Delta v)[S'_c \Rightarrow (m_1,v_1)$，$(m_1,v_1)[\sigma'_1 \Rightarrow (m',v')$，其中$\sigma'_1 = (S'_0,\cdots,S'_{n-1})$. 由于$\sigma'_1$中不含受控转换，于是有$(m_1,0)[\sigma'_1 \Rightarrow (m',v')$. 当$\Delta v$是标识$(m,v)$下的一步允许控制增量时，据定义2，$R_I(m_1,0) \cap M_{(F,K)} = \varnothing$，因此$m' \notin M_{(F,K)}$. 由$m'$的任取性，得2°. 证毕.

下面给出一步允许无冗余控制增量的充要条件.

定理 6 设$y(m,v+\Delta v) = H(m) \otimes{}'(v+\Delta v)$，则$\Delta v$是标识$(m,v)$下的一步允许无冗余控制增量，当且仅当$v + \Delta v \leqslant \delta(m)$且

$$\sum_{i=1}^{\beta} y_i(m,v+\Delta v) \leqslant K - \sum_{i=1}^{\beta} m(f_i). \tag{32}$$

证 由引理3、定理4和5可直接得到.

一步允许无冗余反馈控制不唯一. 应用时，根据定理6先给出所有一步允许无冗余反馈控制的集合，再由物理系统按某种优先序从中选择一个合适的一步允许无冗余控制[3].

5 实例与结论

考虑图1所示由三个工作站组成的离散加工系统，工作站1(有3台机器)依次加工A,B两种工作，再由工作站2(有1台机器)装配后送缓存库. 工作站3(有2台机器)加工C工件，并送缓存库.

令 $m_i = m(p_i), i = 1, \cdots, 10$，并省略 $\otimes'$，于是可建立平衡点方程：

$$\begin{cases} x_1 = m_2 x_2 \oplus' v_1, \quad x_2 = m_1 x_1 \oplus' v_2, \quad x_3 = m_3 x_1 \oplus' m_4 x_2 \oplus' m_6 x_4, \\ x_4 = m_5 x_3, \qquad\quad x_5 = m_8 x_6 \oplus' v_3, \quad x_6 = m_7 x_5. \end{cases} \tag{33}$$

$$y_1 = x_4, \quad y_2 = x_6 \tag{34}$$

用 Gauss 消元法，或由引理 2，可得

$$\begin{cases} y_1 = m_5(m_3 \oplus' m_1 m_4) v_1 \oplus' m_5(m_2 m_3 \oplus' m_4) v_2, \\ y_2 = m_7 v_3. \end{cases} \tag{35}$$

设缓存容量为 3，即 $F = \{p_9, p_{10}\}, K = 3$. 对图示标识 m，有

$$y_1 = 0 v_1 \oplus' 1 v_2, \quad y_2 = 1 v_3, \qquad \delta(m) = (2,1,1)^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

据定理 6，要求 $y_1 + y_2 \leqslant 2$. 于是，综合得到当前标识下的一步允许无冗余控制集 $V = \{v | 0 \leqslant v \leqslant (0,1,1)^{\mathrm{T}}$，或 $0 \leqslant v \leqslant (2,0,0)^{\mathrm{T}}$，或 $0 \leqslant v \leqslant (1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$.

本文应用极小代数，针对标识图模型，给出了一类禁止状态问题的一步允许无冗余反馈控制策略. 本文未涉及一步最大允许无冗余控制策略，有关结果将另文给出.

实际系统中总是存在观测和控制时延，在当前标识下的允许控制起作用前，可能已发生新的并发活动. 如果原来的控制增量在新标识下仍是允许控制增量，则称相应控制算法对控制时延具有鲁棒性. 当控制增量 $\Delta v \geqslant 0$ 时，本文的算法具有对控制时延的鲁棒性.

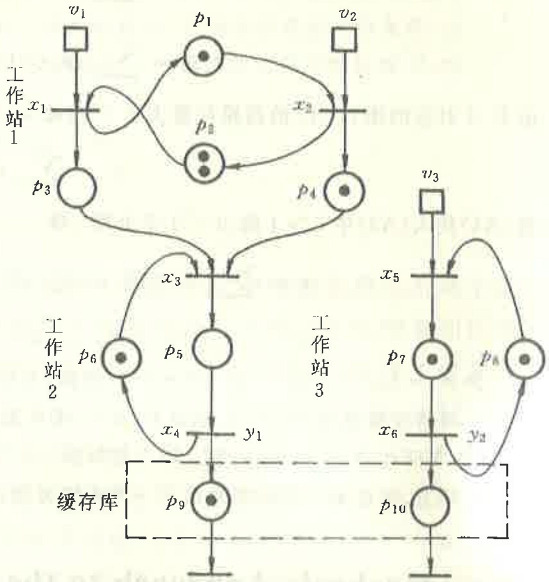

图 1 离散加工系统

参 考 文 献

1 Ramadge, P. J. and Wonham, W. M.. Supervisory control of a class of discrete event processes. SIAM J. Control and Optimization, 1987, 25(1): 206—230

2 Holloway, L. E. and Krogh, B. H.. Synthesis of feedback control logic for a class of controlled Petri nets. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(5): 514—523

3 Krogh, B. H. and Holloway, L. E.. Synthesis of feedback control logic for discrete manufacturing systems. Automatica, 1991, 27(4): 641—651

4 Cohen, G., et al.. A Linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC—30(3): 210—220

5 Commoner, F. and Holt, A. W.. Marked directed graphs. J. Computer and system Sciences, 1971, 5(5): 511—523

6 Cuninghame-Green, R. A.. Minimax Algebra. Lecture Notes No. 166 in Economics and Mathematical Systems, Springer, 1979

7 赵正义，宋文忠. 离散事件动态系统的代数模型及其控制器的分析计算. 控制理论与应用，1994，11(2)：187—192

附 录

引理 2 的证明.

证 $x = \Gamma(A) \otimes' B \otimes' v$ 是方程(14)的解.

由 $m \in L(\mathrm{MG})$ 知,矩阵 A 对应的图[6]的回路权重大于0,且有[6]

$$\sum_{i=0}^{k}{}_{\oplus'} A^i = \sum_{i=0}^{\mu-1}{}_{\oplus'} A^i = \Gamma(A), \quad k \geqslant \mu. \tag{A1}$$

将 $x = \Gamma(A) \otimes' B \otimes' v$ 代入(14),并注意到(A1)即可.

下面证明解的唯一性,其中用到如下事实:若 $a > 0$,则 $x = a \otimes' x \oplus' b$ 等价于 $x = b$.

将(14)写成分量形式

$$x_i = \sum_{j=1}^{\mu}{}_{\oplus'} (a_{ij} \otimes' x_j) \oplus' d_i, \quad i = 1, \cdots, \alpha, \tag{A2}$$

$$d_i = \sum_{j=1}^{\alpha}{}_{\oplus'} (b_{ij} \otimes' v_j), i = 1, \cdots, \mu. \tag{A3}$$

由于 A 对应的图 $G(A)$ 的回路权重大于0,因此 $a_{11} > 0$,于是(A2)的第1个方程等价于

$$x_1 = \sum_{j=2}^{\mu}{}_{\oplus'} (a_{ij} \otimes' x_j) \oplus' d_1. \tag{A4}$$

将(A4)代入(A2)中 $i > 1$ 的 $\mu - 1$ 个方程,得

$$x_i = \sum_{j=2}^{\mu}{}_{\oplus'} (a_{ij}^{(1)} \otimes' x_j) \oplus' d_i^{(1)}, \quad i = 2, \cdots, \mu. \tag{A5}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \oplus' a_{i1} \otimes' a_{1j}, \quad d_i^{(1)} = d_i \oplus' a_{i1} \otimes' d_1, \quad i, j = 2, \cdots, \mu. \tag{A6}$$

令 $A^1 = [a_{ij}^{(1)}]$ 为 $(\mu - 1) \times (\mu - 1)$ 矩阵,对应的图为 $G(A^{(1)})$. 可证 $G(A^{(1)})$ 的每个回路权重等于 $G(A)$ 的若干回路权重取最小($\oplus'$),因此 $G(A^{(1)})$ 的回路权重大于0. 于是上述 Gauss 消元法可继续,直到求得 x_μ 值. 再依次回代得 $x_{\mu-1}, \cdots, x_1$ 值,即方程解唯一. 证毕.

实际上,上述唯一性证明给出了一种求解方程(14)的方法.

Algebraic Approach to the Synthesis of Feedback Control for Discrete Manufacturing Systems

ZHU Gengxin and ZHENG Dazhong

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper concerns the control and coordination of concurrent asynchronous activities in discrete manufacturing systems. The system is modeled by controlled marked graph with external input places. The number of tokens in each external place is controlled to guarantee that the forbidden states will not occur. Logical behavior of the system is described by min algebra and one-step permissive control policy without redundancy is obtained.

Key words: controlled marked graph; supervisory control; min algebra; discrete manufacturing systems

本文作者简介

郑大钟 见本刊1998年第1期第113页.