第 15 卷第 2 期 控制理论与应用 Vol. 15, No. 2
1998 年 4 月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Apr., 1998

基于观测器的不确定动态时滞系统鲁棒镇定的 Riccati 方程方法

张明君 毛维杰 孙优贤 苏宏业

(浙江大学工业控制技术研究所·杭州,310027)

摘要:本文给出了一类不确定动态时滞系统基于观测器的鲁棒镇定方法,该类系统的状态、输入和输出矩阵均含有不确定性,且不确定性需满足给定的匹配条件,系统不仅有状态时滞,还有控制时滞,该方法通过求解两个代数 Riccati 方程实现,本文比较全面地解决了满足匹配条件的不确定动态时滞系统的鲁棒镇定问题.

关键词:观测器;不确定系统;时滞;鲁棒镇定;代数 Riccati 方程

1 系统描述及假设

考虑如下不确定动态时滞系统的鲁棒镇定:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A+\Delta A(r(t)))x(t)+(A_d+\Delta A_d(s(t)))x(t-\tau)\\ &\quad +(B+\Delta B(q(t)))u(t)+(B_d+\Delta B_d(v(t)))u(t-\tau),\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$y(t) = (C+\Delta C(a(t)))x(t), \tag{1.2}$$

$$x(t) = \varphi(t),\quad \forall\, t\in[-\tau,0]. \tag{1.3}$$

式中 $x\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量,$u\in\mathbb{R}^m$ 是控制向量,$y\in\mathbb{R}^r$ 是测量输出;A,A_d,B,B_d 和 C 表示合适维数的矩阵,$\tau>0$ 是滞后时间,$\varphi(t)$ 是一个连续的矢量初值函数,$r(t),s(t),q(t),v(t)$ 和 $a(t)$ 是不确定参数列向量.

假设 1 对所有 $t\geqslant 0$,$r(t),s(t),q(t),v(t)$ 和 $a(t)$ 是 Lebesque 可测的矢量函数,且:

$$\begin{aligned}\Theta &= \{r(t)\in\mathbb{R}^\theta: |r_i(t)|\leqslant\bar{r}, i=1,2,\cdots,\theta,\bar{r}\geqslant 0\},\\ \Omega &= \{s(t)\in\mathbb{R}^\omega: |s_i(t)|\leqslant\bar{s}, i=1,2,\cdots,\omega,\bar{s}\geqslant 0\},\\ \Psi &= \{q(t)\in\mathbb{R}^\psi: |q_i(t)|\leqslant\bar{q}, i=1,2,\cdots,\psi,\bar{q}\geqslant 0\},\\ E &= \{v(t)\in\mathbb{R}^\varepsilon: |v_i(t)|\leqslant\bar{v}, i=1,2,\cdots,\varepsilon,\bar{v}\geqslant 0\},\\ \Pi &= \{a(t)\in\mathbb{R}^\pi: |a_i(t)|\leqslant\bar{a}, i=1,2,\cdots,\pi,\bar{a}\geqslant 0\}.\end{aligned} \tag{2}$$

假设 2 $\Delta A(\cdot),\Delta A_d(\cdot),\Delta B(\cdot),\Delta B_d(\cdot),\Delta C(\cdot)$ 是"秩 1"形矩阵,且满足:

$$\Delta A(r(t)) = B(\sum_{i=1}^{\theta}A_ir_i(t)),\Delta B(q(t)) = B(\sum_{i=1}^{\psi}B_iq_i(t)),\Delta C(a(t)) = \sum_{i=1}^{\pi}C_ia_i(t),$$

$$\Delta A_d(s(t)) = B(\sum_{i=1}^{\omega}A_{di}s_i(t)),\Delta B_d(v(t)) = B(\sum_{i=1}^{\varepsilon}B_{di}v_i(t)). \tag{3}$$

其中 $A_i=d_ie_i^{\mathrm{T}},A_{di}=f_ig_i^{\mathrm{T}},B_i=h_iw_i^{\mathrm{T}},B_{di}=j_ik_i^{\mathrm{T}},C_i=t_iu_i^{\mathrm{T}},d_i,e_i,f_i,g_i,h_i,w_i,j_i,k_i,t_i,u_i$ 均为 n 维列向量.一般来说,如 $\Delta A(\cdot),\Delta A_d(\cdot),\Delta B(\cdot),\Delta B_d(\cdot),\Delta C(\cdot)$ 满足匹配条件,则均可通过"秩 1"分解得到这种需要的形式[5].

假设 3 对系统(1),(A,B) 能控,(A,C) 能观.

本文于 1996 年 7 月 3 日收到.1997 年 3 月 4 日收到修改稿.

假设 4 $A_d = BH, B_d = BN$. 在以下推导中令:

$$T \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{\theta} d_i d_i^{\mathrm{T}},\quad U \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{\theta} e_i e_i^{\mathrm{T}},\quad S \triangleq \bar{s}\sum_{i=1}^{\omega} g_i g_i^{\mathrm{T}},\quad W \triangleq \bar{s}\sum_{i=1}^{\omega} f_i f_i^{\mathrm{T}},\quad V \triangleq \bar{q}\sum_{i=1}^{\psi} h_i h_i^{\mathrm{T}},$$

$$Q \triangleq \bar{q}\sum_{i=1}^{\psi} w_i w_i^{\mathrm{T}},\quad F \triangleq \bar{a}\sum_{i=1}^{\pi} t_i t_i^{\mathrm{T}},\quad K \triangleq \bar{a}\sum_{i=1}^{\pi} u_i u_i^{\mathrm{T}},\quad P \triangleq \bar{v}\sum_{i=1}^{\varepsilon} k_i k_i^{\mathrm{T}},\quad R \triangleq \bar{v}\sum_{i=1}^{\varepsilon} j_i j_i^{\mathrm{T}},$$

$$Z \triangleq \bar{s}^2\sum_{i=1}^{\omega}\sum_{j=1}^{\omega} g_i^{\mathrm{T}} g_i f_j f_j^{\mathrm{T}},\quad G \triangleq \bar{v}^2\sum_{i1=1}^{\varepsilon}\sum_{i2=1}^{\varepsilon} k_{i1}^{\mathrm{T}} k_{i1} j_{i2} j_{i2}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

2 系统基于观测器的鲁棒镇定

对系统(1),本文构造了一个满足如下形式状态方程的状态观测器及反馈控制律:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}}(y - Cz(t)), \tag{5}$$

$$u(t) = - r_c B^{\mathrm{T}} P_c z(t). \tag{6}$$

其中 $z(t) \in \mathbb{R}^n$ 是观测器状态,P_c 和 P_0 及常数 r_c 和 r_0 待定. 一般称,$L = r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}}$ 为观测器增益,$K = - r_c B^{\mathrm{T}} P_c$ 为控制器增益. 以下具体分析系统(1) 的鲁棒镇定问题.

令 $e(t) \triangleq x(t) - z(t)$, 由(1),(5),(6)式可得:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) = {} & (A - r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}} C)e(t) + \Delta A(r(t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(s(t)))x(t-\tau) \\ & + \Delta B(q(t))u(t) + (B_d + \Delta B_d(v(t)))u(t-\tau) - r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}} \Delta C x(t).\end{aligned} \tag{7}$$

对该系统构造 Lyapunov 函数如下

$$V(x(t),e(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \int_{t-\tau}^{t} \begin{pmatrix} x(s) \\ e(s) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ e(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s. \tag{8}$$

对其求时间的导数,有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),e(t)) = {} & \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} + x^{\mathrm{T}}(t) R_1 x(t) \\ & - x^{\mathrm{T}}(t-\tau) R_1 x(t-\tau) + e^{\mathrm{T}}(t) R_2 e(t) - e^{\mathrm{T}}(t-\tau) R_2 e(t-\tau) \\ \leqslant {} & x^{\mathrm{T}}(t)\{A^{\mathrm{T}} P_c + P_c A + 2U + R_1 + K - r_c P_c B[2I - r_c^{-1}(I + T + HH^{\mathrm{T}} \\ & + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z) - 2(Q + V + NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]B^{\mathrm{T}} P_c\} x(t) \\ & + e^{\mathrm{T}}(t)\{A^{\mathrm{T}} P_0 + P_0 A - 2r_0 C^{\mathrm{T}} C + r_0^2 C^{\mathrm{T}} FC \\ & + 2r_c P_c BQB^{\mathrm{T}} P_c + R_2 + r_c^2 P_c BB^{\mathrm{T}} P_c \\ & + P_0 B[T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z + 2r_c V + (r_c + r_c^2)(NN^{\mathrm{T}} \\ & + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]B^{\mathrm{T}} P_0\} e(t) \\ & + x^{\mathrm{T}}(t-\tau)[(1 + r_c) P_c BB^{\mathrm{T}} P_c + 2I - R_1] x(t-\tau) \\ & + e^{\mathrm{T}}(t-\tau)(2r_c P_c BB^{\mathrm{T}} P_c - R_2) e(t-\tau).\end{aligned} \tag{9}$$

令 $R_1 = (1 + r_c) P_c BB^{\mathrm{T}} P_c + 2I, R_2 = 2r_c P_c BB^{\mathrm{T}} P_c$,

$$\begin{aligned}M_1 = {} & A^{\mathrm{T}} P_c + P_c A + 2U + 2I + K - r_c P_c B[I - r_c^{-1}(2I + T + HH^{\mathrm{T}} \\ & + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z) - 2(Q + V + NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]B^{\mathrm{T}} P_c,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}M_2 = {} & A^{\mathrm{T}} P_0 + P_0 A - 2r_0 C^{\mathrm{T}} C + r_0^2 C^{\mathrm{T}} FC + 2r_c P_c BQB^{\mathrm{T}} P_c \\ & + (2 + r_c) r_c P_c BB^{\mathrm{T}} P_c + P_0 B[T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} \\ & + W + Z + 2r_c V + r_c(1 + r_c)(NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]B^{\mathrm{T}} P_0.\end{aligned} \tag{11}$$

则(9)可表示为

$$\dot{V}(x(t),e(t)) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t) M_1 x(t) + e^{\mathrm{T}}(t) M_2 e(t). \tag{12}$$

可见当 $M_1<0, M_2<0$ 时,有 $\dot{V}(t,x)<0$,由 Lyapunov 稳定性定理,可得定理 1.

定理 1　对满足假设 1 ~ 4 的系统(1),如果存在对称正定矩阵 P_c 和 P_0 及正常数 r_c 和 r_0 使得式(10),(11) 的矩阵 M_1, M_2 负定,则由(5),(6)给出的控制律鲁棒镇定系统(1).

进一步令

$$R_0 = I - 2(Q + V + NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G),$$

$$R^{-1} = R_0 - r_c^{-1}(2I + T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z).$$

此时,若代数 Riccati 方程(13)有对称正定解 P_c,则 $M_1 = -\gamma I < 0$,其中 γ 是正常数.

$$A^{\mathrm{T}}P_c + P_cA - r_cP_cBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c + 2U + K + (\gamma + 2)I = 0. \tag{13}$$

令 $P_0 = S^{-1}$,S 为代数 Riccati 方程(14)的对称正定解,其中 η 是正常数,并且取 σ 使 $\sigma \geqslant \sigma_{\max}[T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z + 2r_cV + (r_c + r_c^2)(NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]$.

$$S(A + \eta I)^{\mathrm{T}} + (A + \eta I)S - r_0SC^{\mathrm{T}}CS + \sigma BB^{\mathrm{T}} = 0. \tag{14}$$

将(14)式左右各乘 S^{-1},可得:

$$(A + \eta I)^{\mathrm{T}}P_0 + P_0(A + \eta I) - r_0C^{\mathrm{T}}C + \sigma P_0BB^{\mathrm{T}}P_0 = 0. \tag{15}$$

则有

$$M_2 \leqslant \overline{M}_2 \triangleq -2\eta P_0 - r_0C^{\mathrm{T}}C + r_0^2C^{\mathrm{T}}FC + (2r_c + r_c^2)P_cBB^{\mathrm{T}}P_c + 2r_cP_cBQB^{\mathrm{T}}P_c.$$

综上,可得定理 2.

定理 2　对满足假设 1~4 的系统(1),如果存在对称正定矩阵 P_c 和 P_0 及正常数 r_c, r_0 和 η,使 $R^{-1}>0, \overline{M}_2<0$,则由(5),(6)给出的控制律鲁棒镇定系统(1),并且 P_c 为方程(13)的解,P_0 的逆为方程(14)的解.

3　设计步骤与实例

我们给出如下鲁棒镇定设计步骤:如 $R_0>0$,首先选择 r_c 使 R^{-1} 正定,则方程(13)必有对称正定解 P_c;固定 r_c, r_0 和 η,解方程(14)得 S 和 P_0;然后判断 $\overline{M}_2$ 是否负定,若负定则由定理 2 得基于观测器的反馈镇定控制律,否则继续增大 r_0 后,再求解方程(14),判断 P_0 是否增大,如增大则重复上述设计过程,否则停止.

例 1　考虑如下不确定动态时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -7 & 0.167r_1(t) \\ 0.25r_2(t) & -4 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25s_1(t) \\ -0.25s_2(t) & 0 \end{bmatrix}x(t-\tau)$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & -0.028q_1(t) \\ 0.028q_2(t) & 1 \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1111v_1(t) \\ 0.1111v_2(t) & -0.1 \end{bmatrix}u(t-\tau),$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -0.028a_1(t) \\ 0.028a_2(t) & -2 \end{bmatrix}x(t).$$

式中 $r_1(t), r_2(t), s_1(t), s_2(t), q_1(t), q_2(t), v_1(t), v_2(t), a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 为不确定性时变参数,且 $|r_i(t)| \leqslant 1, |s_i(t)| \leqslant 1, |q_i(t)| \leqslant 1, |v_i(t) \leqslant 1, |a_i(t)| \leqslant 1, i = 1,2$. 可验证上述系统满足假设 1 ~ 4,利用本文的方法,取 $r_c = 6, r_0 = 1, \gamma = 0.5, \eta = 2, \sigma = 8$,可得

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1216 & 0 \\ 0 & 0.0617 \end{bmatrix} > 0, \quad \overline{M}_2 = \begin{bmatrix} -4.1332 & 0 \\ 0 & -2.3607 \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.3431 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_c = \begin{bmatrix} 0.2139 & 0 \\ 0 & 0.3382 \end{bmatrix}.$$

由定理 2 可知,式(5),(6)给出的控制律鲁棒镇定上述不确定时滞系统,其相应的控制器

增益 $K=\begin{bmatrix}-1.2833 & 0\\ 0 & -2.0291\end{bmatrix}$,观测器增益 $L=\begin{bmatrix}0.7446 & 0\\ 0 & -2.000\end{bmatrix}$.

参考文献

1 Schmitendorf, W. E.. Design of observer-based robust stabilizing controllers. Automatica, 1988, 24(5): 693—696

2 Petersen, I. R.. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, 30(9): 904—907

3 Jabbari, F. et al.. Robust Linear controller using observers. IEEE Automat. Contr., 1991, 36(12): 1509—1514

4 朱晓东,孙优贤.不确定动态时滞系统的基于观测器的鲁棒镇定设计.控制理论与应用,1996,13(2):254—258

5 Petersen, I. R.. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Syst. Contr. Lett., 1987, 8: 351—357

An Observer-Based Riccati Equatuon Approach for Robust Stabilization of Time-Varying Delayed Uncertain Systems

ZHANG Mingjun, MAO Weijie, SUN Youxian and SU Hongye

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University • Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: In this note, we present a robust stabilization method for a class of observer-based time-delay uncertain systems where the uncertainty satisfies the matching conditions. These systems have delays in both state and control input. Through solving a pair of Riccati equations, observer-based feedback controller is obtained. The paper completely solves the robust stabilization problem of systems where the uncertainty satisfies the matching conditions.

Key words: observer; time-varying delay; uncertain system; robust stabilization; algebraic Riccati equation

本文作者简介

张明君 1967年生.分别于1994年和1997年在浙江大学获得硕士和博士学位.主要研究方向为控制系统工程设计方法学,时滞系统控制,鲁棒控制等理论与应用.

毛维杰 1969年生.分别于1994年和1997年在浙江大学获得硕士和博士学位,现为浙江大学工业控制技术研究所讲师.主要研究方向为电气传动与控制,时滞系统控制,解耦控制,鲁棒控制等理论与应用.

孙优贤 见本刊1998年第1期第108页.

苏宏业 见本刊1998年第2期第262页.