

一种非线性 H_∞ 控制的频域方法*

郭朝晖 吴铁军

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州, 310027)

摘要: 本文研究了基于非线性传递函数(NTF)的频域方法在系统分析与综合中的应用. 我们提出了非线性系统的 Hurwitz 性、 H_∞ 指标等概念, 讨论了 NTF 的状态方程实现、闭环系统稳定范围等问题. 在此基础上研究了以 NTF 为工具的系统设计方法, 并用仿真实例说明了这类控制器的性能.

关键词: 非线性 H_∞ ; 非线性传递函数; Volterra 级数

1 引言

1.1 问题背景

线性系统的 H_∞ 方法最初是一种基于传递函数的设计方法^[1]. 有人利用线性系统传递函数的 H_∞ 范数同时是 L_2 空间的导出范数这一性质, 将这一理论推广到非线性系统. 这项工作中影响较大的有 Schaft 基于 Hamilton-Jacobi 方程的工作^[2], Foias, Tannenbaum 的算子级数方法^[3], J. A. Ball 和 J. Helton 的对策理论方法^[4]等. 但由于这些工作不是基于频域的, 因而线性 H_∞ 理论的许多频域设计方法无法推广.

Volterra 级数是描述非线性系统输入输出关系的经典工具^[5], 一大类非线性系统都可以被这种模型逼近^[6]. 对于非线性时不变系统, Volterra 级数有对应的频域形式, 称为非线性传递函数(NTF)或 Volterra 传递函数. 本文试图利用 NTF 从频域直接推广 H_∞ 方法, 从而同时继承频域方法和 H_∞ 方法的双重优点. 其中, 频域方法的主要优点有:

- 系统的 NTF 模型可以通过测量得到^[7], 在模型辨识方面优于状态空间模型.
- 用频域方法设计出来的系统常常具有更好的鲁棒性, 更加适用于模型精度不高的情况.
- 频域方法具有较强的物理背景, 是实际工程问题中使用最广泛的方法, 因此基于频域的非线性问题处理方法易被工程技术人员接受.

设系统可以展开为

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) d\tau_i,$$

其中 u 和 y 分别是系统的输入和输出, $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 称为系统的 n 阶核, 它的 n 维 Laplace 变换 $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 称为系统的 n 阶 NTF. 称:

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) d\tau_i$$

为系统的 n 阶输出, 它可以按照下面的公式计算:

$$y_n(t) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \cdots \int_{-j\infty}^{+j\infty} H_n(S_1, \dots, S_n) \prod_{i=1}^n \hat{u}(S_i) e^{S_i t} dS_i.$$

其中 $\hat{u}(S)$ 为 $u(t)$ 的 Laplace 变换.

* 国家自然科学基金重点项目(69334010)课题.

本文于 1996 年 1 月 2 日收到. 1996 年 12 月 9 日收到修改稿.

1.2 基本假设

本文的工作限于如下单输入单输出的有限维时不变系统, 设系统可表示为:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{X} = F(X, u), \\ y = h(X). \end{cases}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^N$ 是系统的状态向量, u, y 分别是系统的输入和输出, $F(0, 0) = 0, h(0) = 0$. 并且 $F(X, u)$ 和 $h(X)$ 在各自的原点是解析的. 设 Σ 在原点的一阶近似系统为:

$$\Pi: \begin{cases} \dot{X} = AX + bu, \\ y = c^T X. \end{cases}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}, b, c \in \mathbb{R}^N$. 如果 Π 是可稳可检测的则称 Σ 是良态的 (注意: 由于 Σ 是非线性系统, 即使它是可控可观的也不一定是良态的). 下文总假设被控系统良态的因果系统. 可稳可检测系统的特点是其不稳定模态可以通过其传递函数的极点表现出来, 所以如果 Π 的传递函数的极点都具有负实部, 则 A 的所有特征值都具有负实部, 因而 Σ 是局部稳定的, 此时称 Σ 是良态稳定的. 事实上, Π 的传递函数即为 Σ 的一阶 NTF, 因此良态系统的一阶 NTF 可决定其局部稳定性.

本文用 $\| * \|$ 表示信号的 2 范数.

2 Hurwitz 系统及非线性传递函数的状态方程实现

为把 H_∞ 空间的概念推广到非线性系统, 下面给出 Hurwitz 系统的定义:

定义 1 如果 $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 在 $\{(S_1, S_2, \dots, S_n) | \operatorname{Re}(S_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ 有界, 则称它是 Hurwitz 的; 如果系统各阶 NTF 都是 Hurwitz 的, 就称系统是 Hurwitz 的. 称向量或矩阵是 Hurwitz 的, 如果它的每一个分量都是 Hurwitz 的.

由于良态系统的一阶 NTF 可决定其局部稳定性, 所以 Hurwitz 系统是局部稳定的.

下文中 $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 用来特指 Σ 的 n 阶 NTF. 把到 X 的算子记为 Δ , 它的 n 阶 NTF 向量记为 Δ_n :

$$\Delta_n = (\Delta_{1n}, \Delta_{2n}, \dots, \Delta_{Nn})^T.$$

设系统 a, b 的 n 阶 NTF 分别为 $a_n(S_1, S_2, \dots, S_n), b_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 则它们的加和、乘积系统的 n 阶 NTF 分别为:

$$\begin{aligned} & a_n(S_1, S_2, \dots, S_n) + b_n(S_1, S_2, \dots, S_n), \\ & \operatorname{syn}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i(S_1, S_2, \dots, S_i) b_{n-i}(S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_n)\right). \end{aligned}$$

其中 syn 为对称化. 因此如果 a, b 都是 Hurwitz 的则它们的加和、乘积系统也是 Hurwitz 的. 由此不难看出: 如果 $h(X)$ 是解析的, 则 $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 可由 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 求出; 如果 Δ 是 Hurwitz 的, Σ 也是 Hurwitz 的.

定理 1 如果良态系统 Σ 的一阶 NTF 是 Hurwitz 的, 那么它是 Hurwitz 的.

证 由前面的讨论, 只需证明 Δ 是 Hurwitz 的.

首先, 由于 Σ 是良态的并且 H_1 是 Hurwitz 的, 所以 Π 中 A 的所有特征值具有负实部, 因而 Δ_1 是 Hurwitz 的. 下面证明 Δ_2 是 Hurwitz 的.

由于 $\dot{X}$ (状态的导数) 是由 X 后置一个微分环节得到的, 所以由串联系统的 NTF 求法^[12] 可知它的二阶 NTF 为

$$(S_1 + S_2)\Delta_2. \quad (1)$$

对 $F(X, u)$ 进行 Taylor 展开. 很明显, u 到 $F(X, u)$ 的二阶 NTF 只与它 Taylor 展开的前二项有关.

$$\text{令 } \bar{X} = \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}, \quad \bar{\Delta}_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

设 $F(X, u)$ 的二阶 Taylor 展开为:

$$AX + bu + \begin{bmatrix} X^T Q_1 X \\ X^T Q_2 X \\ \vdots \\ X^T Q_N X \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中 Q_i 是对称矩阵. 把 (2) 的二阶项看成点乘系统, 所以它的二阶 NTF 为:

$$A\bar{\Delta}_2 + \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_1\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_2\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_N\bar{\Delta}_1(S_2) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

由于 (1)(3) 两式相等, 所以

$$\Delta_2 = [(S_1 + S_2)I - A]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_1\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_2\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_N\bar{\Delta}_1(S_2) \end{bmatrix}.$$

由于 Δ_1 是 Hurwitz 的, 向量

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_1\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_2\bar{\Delta}_1(S_2) \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^T(S_1)Q_N\bar{\Delta}_1(S_2) \end{bmatrix}$$

也是 Hurwitz 的, 再利用 A 的所有特征值都具有负实部的性质可知矩阵 $[(S_1 + S_2)I - A]^{-1}$ 是 Hurwitz 的, 因此 Δ_2 是 Hurwitz 的.

高阶的情况完全类似, 略. 证毕.

本文基于 NTF 的设计方法要求 $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 在一定条件下具有良态稳定的有限维状态方程实现 (以下简称良态实现), 这关系到控制器的实现和系统的稳定性. 由加和、乘积系统各阶输出的求法^[12] 不难看出: 在 $h(X)$ 解析的条件下, 只要 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 各自具有良态实现, $H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 就具良态实现; 特别地, 如果 $h(X)$ 的 Taylor 展开不含一阶项则条件可减弱为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ 具有良态实现.

定理 2 如果 Σ 是良态稳定的, 则它的任意一阶 NTF 存在良态实现.

证 由前面的讨论, 只要证明对任意的 $n, \Delta_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 存在良态实现.

$\Delta_1(S)$ 显然存在良态实现, 现在假设 $\Delta_m(S_1, S_2, \dots, S_m), m = 1, 2, \dots, n-1$, 单独存在良态实现. 定义:

$$G(X, u) = F(X, u) - AX - bu.$$

它的 n 阶 NTF 记为 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$. 由于 $G(X, u)$ 的 Taylor 展开不含一阶项, 所以在 $\Delta_m(S_1, S_2, \dots, S_m), m = 1, 2, \dots, n-1$, 存在良态实现的条件下 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 存在良态实现.

由定理 1 的证明过程可知:

$$\Delta_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = [(S_1 + S_2 + \dots + S_n)I - A]^{-1}G_n(S_1, S_2, \dots, S_n).$$

所以 $\Delta_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 可通过在 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 输出后串联一个可良态实现的传递函数矩阵为 $(SI - A)^{-1}$ 的线性系统得到, 因此 $\Delta_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 存在良态实现.

因此定理可由数学归纳法原理得到. 证毕.

3 系统的 H_∞ 指标

$H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 的 H_∞ 范数定义为

$$|H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(S_i) > 0} |H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|.$$

系统的 NTF 有各种等价形式, 但下面的命题保证了这一定义的合理性:

命题 1 对称化核对应的 H_∞ 范数最小.

证 记 $H_n(S_1, \dots, S_n)$ 的对称化核为 $\operatorname{syn}[H_n(S_1, \dots, S_n)]$ 那么:

$$\operatorname{syn}[H_n(S_1, \dots, S_n)] = \frac{1}{n!} \left[\sum H_n(S_{i_1}, \dots, S_{i_n}) \right].$$

其中 $(i_1, \dots, i_n)$ 取遍 $(1, 2, \dots, n)$ 的所有可能的排列. 容易看出:

$$|\operatorname{syn}[H_n(S_1, \dots, S_n)]|_\infty \leq \frac{1}{n!} \left[\sum |H_n(S_{i_1}, \dots, S_{i_n})|_\infty \right].$$

由定义直接可得: $|H_n(S_{i_1}, \dots, S_{i_n})|_\infty$ 是彼此相等的, 所以

$$|\operatorname{syn}[H_n(S_1, \dots, S_n)]|_\infty \leq \frac{1}{n!} [n! |H_n(S_1, \dots, S_n)|_\infty] = |H_n(S_1, \dots, S_n)|_\infty. \quad \text{证毕.}$$

注 NTF 的对称化形式是唯一的.

如果 Σ 是 Hurwitz 的, 它的 H_∞ 指标定义为

$$H_\infty(\alpha) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n |H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty.$$

其中 α 为正实数, 取值范围受收敛域限制, 而收敛域的大小有待于进一步研究. 下面的性质说明它与线性系统 H_∞ 范数有类似的作用.

命题 2 当 $\|u\| \leq \alpha$ 时 $\|y\| \leq H_\infty(\alpha)$.

证

$$\begin{aligned} \|y_n\|^2 &= \|\hat{y}_n\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(jS_1, jS_2, \dots, jS_n)|^2 |\hat{u}(jS_1)\hat{u}(jS_2)\dots\hat{u}(jS_n)|^2 dS_1 dS_2 \dots dS_n \\ &\leq |H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty^2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(jS_1)\hat{u}(jS_2)\dots\hat{u}(jS_n)|^2 dS_1 dS_2 \dots dS_n \\ &= |H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty^2 \|\hat{u}\|^{2n} \\ &\leq \alpha^{2n} |H_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty^2. \end{aligned}$$

由 $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 即得该命题. 证毕.

Zames 在 [1] 中特别强调了加权 H_∞ 范数的重要性, 本文把这一概念推广为加权 H_∞ 指标: 对给定的权函数 $W(S)$, 令:

$$W_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = W(S_1)W(S_2)\dots W(S_n)$$

或

$$W_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = W(S_1 + S_2 + \dots + S_n).$$

定义

$$H_\infty(\alpha, W) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n |H_n(S_1, \dots, S_n) W_n(S_1, \dots, S_n)|_\infty$$

为系统的加权 H_∞ 指标. 其意义是: 在 $\|u\| \leq \alpha$ 的条件下, 两种权函数定义的 $H_\infty(\alpha, W)$ 分别给出了在系统前、后加一传递函数为 $W(S)$ 的线性滤波器时 $\|y\|$ 的上限. 下文假设 $W(S)$ 是最小相位、严格正则的.

4 闭环系统的稳定范围

对于良态系统, 一阶 NTF 的 Hurwitz 性可以保证其局部稳定性, 但不能确定稳定范围的大小. 下面我们研究这一问题. 下文中控制对象用 P 表示, 它的一阶系统 P_L 称为其线性部分, $P_N = P - P_L$ 称其为非线性部分. 当 P_L 是最小相位时, 就称 P 是最小相位的. 现考虑图 1 所示闭环系统:

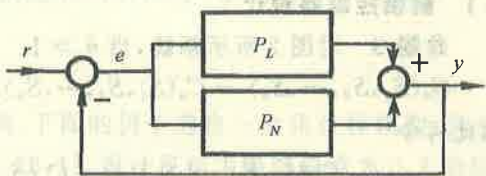


图 1 闭环系统

设 P 是 Hurwitz 系统, 其中 P_N 部分的 H_∞ 指标为 $H_{N,\infty}(\alpha)$. 设闭环系统的线性部分稳定, 定义 $\beta \triangleq |(1 + P_L)^{-1}|_\infty$. 下面的定理给出了闭环系统稳定的范围:

定理 3 对图 1 所示系统, $\|r(t)\| < \alpha/\beta - H_{N,\infty}(\alpha)$ 时 $\|e\| \leq \alpha$.

证 由图 1 知

$$e = r - (P_L + P_N)e.$$

所以

$$(1 + P_L)e(t) = r(t) - P_N e(t),$$

$$e(t) = (1 + P_L)^{-1}r(t) - (1 + P_L)^{-1}P_N e(t). \quad (4)$$

若定理不成立, 则必存在有限的时刻 t 使得

$$\|e\|_t \triangleq \left(\int_0^t e^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} = \alpha.$$

由 P 的因果性可知 $\|P_N e\|_t \triangleq \left(\int_0^t (P_N e)^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq H_{N,\infty}(\alpha).$

利用(4)式可知

$$\alpha - H_{N,\infty}(\alpha)\beta \leq \alpha - \beta \|P_N e\|_t \leq \beta \left(\int_0^t |r(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \beta \|r\|.$$

与定理条件矛盾. 证毕.

上述结论可以看成小增益定理的推广, 它说明极小化系统非线性部分的 H_∞ 指标有利于系统的稳定性.

5 控制器设计

现在研究图 2, 3 所示系统跟踪问题的控制器设计方法. 图中 r, y 分别为参考输入和输出, C 为控制器. 跟踪问题的设计目标可表达为: 求各阶 $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 以极小化

$$|W_1(S)(G_1(S) - 1)|_\infty,$$

$$|W_n(S_1, S_2, \dots, S_n)G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty, \quad n > 1.$$

其中, $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 为 r 到 y 的 n 阶 NTF.

控制器的各阶 NTF 可按下面的步骤逐阶设计:

- 根据 P 的线性部分, 采用线性 H_∞ 的方法设计 C 的一阶 NTF $C_1(S)$.

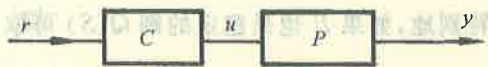


图 2 前馈系统

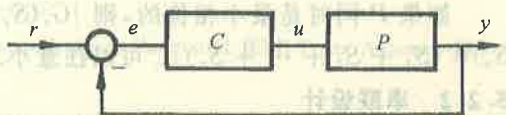


图 3 反馈系统

- 计算 C 包含 $n-1$ 阶控制 NTF 时 r 到 y 的 n 阶 NTF $G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$.
- 根据 $G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 设计 $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 以优化 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$.

考虑到 $m < n$ 时 $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 的设计不影响 $G_m(S_1, S_2, \dots, S_n)$, 这一设计步骤是合理的. $G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 可由串联或反馈系统 NTF 的求法得到^[12], $G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$, $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 和 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 之间的关系由命题 3~5 给出, 它们可从串联、反馈系统 NTF 的计算方法直接得到^[12].

5.1 前馈控制器设计

命题 3 对图 2 所示系统, 当 $n > 1$

$$G_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)P_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n) + G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n).$$

因此可令

$$C_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = -C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n)G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n),$$

所以 $G_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = (1 - P_1C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n))G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$.

特别地, 当 P 为最小相位时, 可选择 $C_1(S)$ 使得 $|W(S)(1 - P_1C_1(S))|_\infty$ 任意小^[8], 所以

$$|W(S_1 + S_2 + \dots + S_n)G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)|_\infty$$

也可以任意小.

由定理 2, $G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 存在良态实现, 而 $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 为 $-G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 后串联 $C_1(S)$ 得到, 因此 $C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 也存在良态实现. 5.2 节的情况是类似的, 不再一一指出.

5.2 反馈控制器设计

$C_n(S_1, S_2, \dots, S_n)$ 的设计方法有多种, 本文共提出两种.

5.2.1 直接设计

命题 4 对图 3 所示系统, 当 $n > 1$ 时成立

$$G_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n) - \frac{1}{1 + P_1C_1(S_1)} \cdots \frac{1}{1 + P_1C_1(S_n)} \\ \cdot C_n(S_1, S_2, \dots, S_n) \frac{P_1(S_1 + \dots + S_n)}{1 + P_1C_1(S_1 + \dots + S_n)}.$$

如果 $C_1(S)$ 是稳定的, 可以采用直接设计方法. 取 $Q(S) \in H_\infty$ 空间使得

$$|W(S) \left(1 - \frac{Q(S)}{1 + P_1C_1(S)} \right)|_\infty$$

尽量小. 令

$$C_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = Q(S_1) \cdots Q(S_n)G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n)C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n).$$

特别地, 如果 P 也是稳定的则 $Q(S)$ 可取 $1 + P_1C_1(S)$, 于是

$$G_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n) \frac{1}{1 + P_1C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n)}.$$

如果 P 同时是最小相位的, 则 $|G_n(S_1, S_2, \dots, S_n)W(S_1 + S_2 + \dots + S_n)|_\infty$ 可以任意小.

5.2.2 串联设计

图 4 中 $D_1 = 0$, C_1 为线性控制器, 也就是把控制器的非线性部分串联在线性部分之前, 这种设计方法不要求 C_1 稳定.

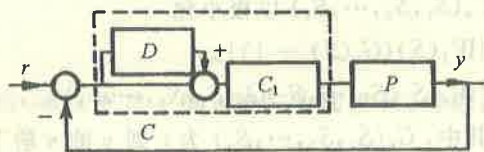


图 4 串联设计

命题 5 对图 4 所示系统, $n > 1$ 时成立:

$$G_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n) - \frac{1}{1 + P_1 C_1(S_1)} \cdots \frac{1}{1 + P_1 C_1(S_n)} D_n(S_1, S_2, \dots, S_n) \\ \cdot \frac{P_1 C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n)}{1 + P_1 C_1(S_1 + S_2 + \dots + S_n)}.$$

因此只要取

$$D_n(S_1, S_2, \dots, S_n) = Q(S_1) \cdots Q(S_n) G_n^\#(S_1, S_2, \dots, S_n),$$

就可实现与直接设计方法相同的效果.

6 仿真研究

受篇幅限制, 本文只给出反馈控制的仿真实例. 下面的例子选自一生化过程模型, 其中 u 和 X_3 分别为输入和输出, 系统平衡点取 $(52.83, 0.28, 1)$. 设计目标为跟踪幅值为 0.2 的阶跃输入.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = 0.42 \frac{X_1 X_2}{0.025 + X_2} \frac{1}{1 + X_3^2} - X_1 u, \\ \dot{X}_2 = -0.84 \frac{X_1 X_2}{0.025 + X_2} \frac{1}{1 + X_3^2} - (114.2 - X_2)u - 0.03 X_1, \\ \dot{X}_3 = 0.0023 X_1 + 0.00294 \frac{X_1 X_2}{0.025 + X_2} \frac{1}{1 + X_3^2} - X_3 u. \end{cases}$$

我们比较了两种控制器的控制效果: 一种是忽略系统非线性部分影响, 根据一阶近似设计的线性 H_∞ 控制器, 一种是包含二阶 NTF 的非线性 H_∞ 控制器. 图 5 给出了两种控制器在 2 小时内的跟踪误差曲线.

7 结 论

同线性 H_∞ 理论一样, 基于状态空间模型的设计方法可能会更方便. 但实际工程问题中状态空间模型一般很难得到, 这时人们甚至宁愿使用线性近似来处理非线性问题. 由于辨识频域模型要比状态空间模型容易得多, 而且频域方法具有方法直观、易于工程技术人员接受等优点, 所以本文的方法更具工程意义.

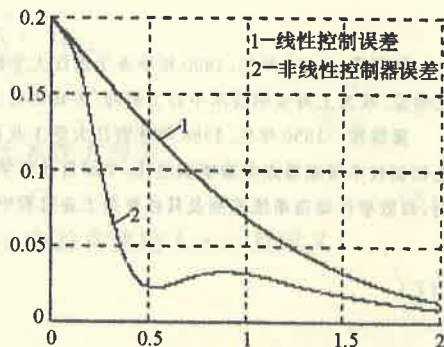


图 5 跟踪误差曲线

参 考 文 献

- 1 Zames, G.. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation multiplicative seminorms and approximate inverses. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(2): 301-320
- 2 Schaft, V.. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(6): 770-784
- 3 Foias, C. & Tannenbaum, A.. Weighted optimization for nonlinear system. SIAMJ. Contr. & Opt., 1989, 27(4): 842-860
- 4 Ball, J. A. & Helton, J. W.. H_∞ control for nonlinear plants: connections with differential games, in Proc 28th CDC Tampa, FL, 1989, 956-962
- 5 Schetzen, M.. Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. New York: Wiley, 1980
- 6 Boyd, S. & Chua, L. O.. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. IEEE

- Trans. Circuits & Systems, 1985, CAS-32(11):1150—1161
- 7 Boyd, S. . Measuring Volterra kernels. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1983, CAS-30(11):571—577
 - 8 Doyle, J. C. , Francis, B. A. & Tannenbaum, A. . Feedback control theory. New York: Macmillan, 1992
 - 9 Isidori, A. . Nonlinear Control Systems. 2nd Edition, New York: Springer-Verlag, 1989
 - 10 Doyle, J. C. , Glover, K. , Khargonekar, P. P. & Francis, B. A. . State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1989, AC-34(8):831—846
 - 11 Francis, B. A. . A Course in H_∞ Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987
 - 12 焦李成. 非线性传递函数理论与应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992

A Frequency Domain Approach to Nonlinear H_∞ Control

GUO Zhaohui and WU Tiejun

(National Lab for Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: A nonlinear controller analysis and synthesis scheme based on Nonlinear Transfer Functions (NTF) in frequency domain is presented that retains the original and characteristics of conventional linear H_∞ control theory. Some essential concepts such as H_∞ norm and space are generalized into nonlinear case, and the realization problem of NTF is considered. A simulation case study is used to evaluate its performance.

Key words: nonlinear H_∞ control; nonlinear transfer function; Volterra series

本文作者简介

郭朝晖 1968年生. 1990年毕业于浙江大学数学系, 1994年获得浙江大学化学工程硕士学位, 1997年获工业自动化博士学位. 现为上海宝钢技术中心工程师. 主要研究方向有非线性控制, 信息智能处理等.

吴铁军 1950年生. 1988年获浙江大学工业自动化专业博士学位. 现为该校工业控制技术研究所教授, 博士生导师, 工业控制技术国家重点实验室副主任, 中国自动化学会智能自动化委员会委员. 当前研究领域为大系统的智能控制, 非线性控制, 离散事件动态系统控制及其在复杂工业过程中的应用.



图1 系统输出响应